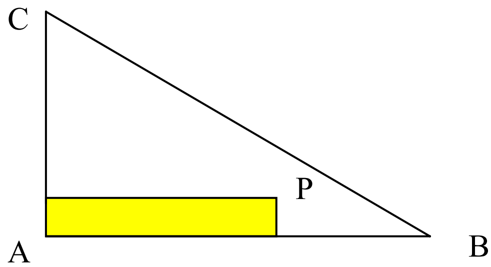
Kangourou della Matematica 2005
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2005

LIVELLO CADET

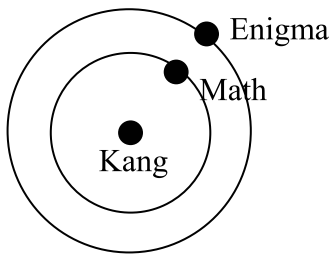
C1. (*5 punti*) Prima che venisse impiegato il lettore ottico, le schede-risposta di Kangourou venivano esaminate a mano. Un correttore umano esaminava in media 2 schede al minuto. Alle undici del mattino di un dato giorno aveva esaminato la metà delle schede che gli erano state assegnate per quel giorno. A mezzogiorno ne aveva esaminati i due terzi. Se non si fosse mai fermato e avesse continuato allo stesso ritmo, quante schede gli sarebbero rimaste da esaminare alla una di pomeriggio di quel giorno?

C2. (*7 punti*) Considera una scacchiera 7x7 e chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Si possono disporre 49 numeri interi, non necessariamente tutti uguali fra loro, sulle 49 caselle, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva?

C3. (*11 punti*) Osserva la figura. Il triangolo ABC è rettangolo e il punto P dista 1 cm sia dal cateto AB, che è lungo 8 cm, sia dall'ipotenusa BC, che è lunga 10 cm. Qual è l'area del rettangolo ombreggiato?



C4. (*14 punti*) Kang è una stella immaginaria che possiede due pianeti: Enigma e Math. Essi si muovono in uno stesso piano, descrivendo ciascuno un'orbita circolare centrata in Kang con velocità angolare costante, ma diversa l'uno dall'altro. Infatti Enigma, il più lontano, ruota attorno a Kang in senso orario in 7 giorni, mentre Math impiega 5 giorni, ruotando in senso antiorario. In questo istante si può osservare un'eclissi di Enigma da parte di Math (osserva la figura). Tra quanto tempo si verificherà la prossima eclissi?



C5. (*18 punti*) Se x e y sono due numeri interi strettamente positivi tali che si abbia

$$x + y + xy = 90,$$

quanti sono i possibili valori della somma $x + y$?

C6. (*22 punti*) Un indovino predice che nel 2080 si terrà a Mirabilandia la finale mondiale di Kangourou e che il numero dei finalisti

- avrà una rappresentazione in base 10 formata da 4 cifre tutte diverse da 0;
- sarà la somma dei quattro numeri che si ottengono elevando a se stessa ciascuna delle quattro cifre che compaiono nella rappresentazione (dunque se, per esempio, comparissero le cifre 2 e 7, due degli addendi sarebbero 2^2 e 7^7).

Determina, grazie a queste indicazioni, quanti finalisti prevede l'indovino per quella memorabile edizione di Kangourou.

LIVELLO CADET

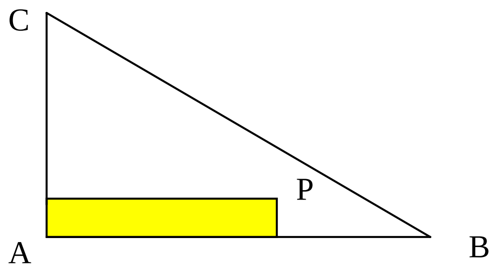
C1. (*5 punti*) Prima che venisse impiegato il lettore ottico, le schede-risposta di Kangourou venivano esaminate a mano. Un correttore umano esaminava in media 2 schede al minuto. Alle undici del mattino di un dato giorno aveva esaminato la metà delle schede che gli erano state assegnate per quel giorno. A mezzogiorno ne aveva esaminati i due terzi. Se non si fosse mai fermato e avesse continuato allo stesso ritmo, quante schede gli sarebbero rimaste da esaminare alla una di pomeriggio di quel giorno?

Soluzione: 120. Alle 12 il correttore aveva esaminato 2/3 – 1/2 = 1/6 di schede in più rispetto alle 11 e questo "sesto" corrisponde a 2 x 60 = 120 schede. Per concludere il lavoro, alle 12 mancavano ancora i 2/6 delle schede e un'ora dopo 1/6, pari dunque a 120 schede.

C2. (*7 punti*) Considera una scacchiera 7x7 e chiama croce greca ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Si possono disporre 49 numeri interi, non necessariamente tutti uguali fra loro, sulle 49 caselle, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva?

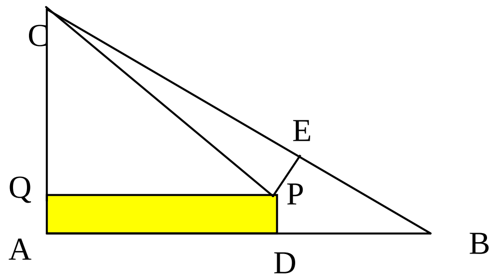
Soluzione: sì. Si osserva infatti che nessuna delle quattro caselle d'angolo può essere coperta da una croce greca: basta quindi mettere in ciascuna casella, tranne in una delle quattro d'angolo, il numero 1 (quindi la somma in ogni croce greca risulta 5) e nella restante casella mettere – 48 – 1 = - 49. La somma totale degli interi vale allora –1.

C3. (*11 punti*) Osserva la figura. Il triangolo ABC è rettangolo e il punto P dista 1 cm sia dal cateto AB, che è lungo 8 cm, sia dall'ipotenusa BC, che è lunga 10 cm. Qual è l'area del rettangolo ombreggiato?

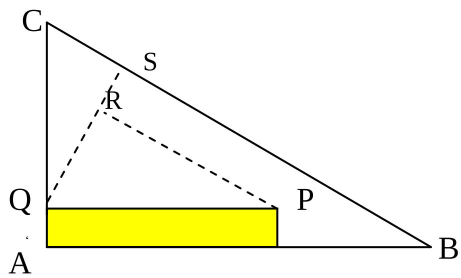


Soluzione: 5 cm^2. Il cateto AC è lungo 6 cm. Proponiamo tre possibili soluzioni.

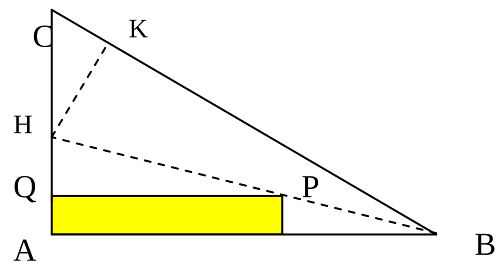
(A) Siano Q e D i restanti vertici del rettangolo ed E il piede della perpendicolare da P a BC. PE misura 1 cm; CQ misura 6-1 = 5 cm e, se AD misura x cm, BE = DB misura 8-x cm e quindi CE misura 10-(8-x)=2+x cm. Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli CQP e PEC si trova che $5^2+x^2 = 1^2+(2+x)^2$. Sviluppando si trova 4x = 20: quindi AD misura 5 cm, PD misura 1 cm e quindi l'area del rettangolo è 5 cm^2.



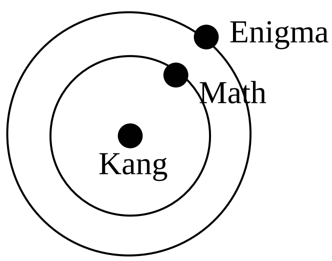
(B) Sia Q il vertice del rettangolo che sta sul cateto AC e siano S il piede della perpendicolare condotta da Q all'ipotenusa BC ed R il piede della perpendicolare condotta da P a QS. I triangoli rettangoli CBA e CQS sono simili avendo un angolo in comune e visto che l'ipotenusa BC di CBA misura 10 cm mentre quella CQ di CQS misura 6-1=5 cm il rapporto di proporzionalità è 2:1. Dunque QS misura 4 cm e QR misura 3 cm (la retta PR dista 1 cm dalla BC!). Il triangolo rettangolo QPR è allora congruente a CQS (gli angoli SCQ e RQP sono congruenti in quanto complementari di CQS), per cui QP misura 5 cm.



(C) Siano: Q il vertice del rettangolo che sta sul cateto AC, H il punto in cui la retta per B e P incontra il cateto AC e K il piede della perpendicolare condotta da H sull'ipotenusa BC. Dall'uguaglianza dei triangoli ABH e KBH segue che KC è lungo 10 – 8 = 2 cm. Dalla similitudine dei triangoli ABC e HKC, segue che CQ è lungo 10/3 cm, quindi che HQ è lungo 6 – 10/3 – 1 = 5/3 cm. Dalla similitudine dei triangoli ABH e QPH segue allora che QP è lungo 5 cm.



C4. (*14 punti*) Kang è una stella immaginaria che possiede due pianeti: Enigma e Math. Essi si muovono in uno stesso piano, descrivendo ciascuno un'orbita circolare centrata in Kang con velocità angolare costante, ma diversa l'uno dall'altro. Infatti Enigma, il più lontano, ruota attorno a Kang in senso orario in 7 giorni, mentre Math impiega 5 giorni, ruotando in senso antiorario. In questo istante si può osservare un'eclissi di Enigma da parte di Math (osserva la figura).Tra quanto tempo si verificherà la prossima eclissi?



Soluzione: 3 giorni meno due ore. Dopo T giorni a partire dall'istante dell'eclissi, Enigma ha ruotato di T × (360/7) gradi in un verso e Math di T × (360/5) gradi nel verso opposto: la prossima volta che i due pianeti saranno nuovamente riallineati con Kang, T dovrà essere tale che la somma di queste due quantità valga esattamente 360. Si ricava T = 35/12, e 35/12 di giorno sono esattamente 3 giorni meno 2 ore.

C5. (*18 punti*) Se x e y sono due numeri interi strettamente positivi tali che si abbia

$$x + y + xy = 90,$$

quanti sono i possibili valori della somma x + y ?

Soluzione: uno e uno solo, 18. Infatti la condizione può essere riscritta come

$$x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1) = 91 = 13 \times 7$$

e questa è l'unica scomposizione di 91 in interi positivi diversi da 1 e 91: segue subito $x = 12$ e $y = 6$ o viceversa.

C6. (*22 punti*) Un indovino predice che nel 2080 si terrà a Mirabilandia la finale mondiale di Kangourou e che il numero dei finalisti

- avrà una rappresentazione in base 10 formata da 4 cifre tutte diverse da 0;
- sarà la somma dei quattro numeri che si ottengono elevando a se stessa ciascuna delle quattro cifre che compaiono nella rappresentazione (dunque se, per esempio, comparissero le cifre 2 e 7, due degli addendi sarebbero 2^2 e 7^7).

Determina, grazie a queste indicazioni, quanti finalisti prevede l'indovino per quella memorabile edizione di Kangourou.

Soluzione: 3435. Incominciamo con l'osservare che $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, $5^5 = 3125$ mentre $6^6 = 64 \times 728 > 9999$, per cui le cifre contenute nella rappresentazione del numero sono tutte non superiori a 5. Inoltre la cifra 5 può comparire al massimo una volta (altrimenti la cifra delle migliaia sarebbe maggiore di 5) e deve effettivamente comparire, poiché usando solo le prime 4 cifre si ottiene solo un numero superiore a 999 ($1024 = 256 \times 4$), che però non rispetta la seconda condizione. Quindi si devono sommare a 3125 tre delle quattro potenze precedenti (eventualmente ripetendole).
La somma sarà allora non superiore a $3125 + 256 \times 3 = 3893$ e quindi una seconda cifra certa è 3. A questo punto conviene procedere per tentativi, verificando direttamente che cosa succede aggiungendo a $3125 + 27 = 3152$ il contributo di ciascuna delle 10 coppie non ordinate costruibili con le potenze dei quattro interi 1, 2, 3 e 4: l'unico numero possibile rimane 3435.