



Kangourou Italia
Gara del 18 marzo 2004
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza superiore



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Il valore dell'espressione $(1 - 2) - (3 - 4) - (5 - 6) - \dots - (99 - 100)$ è
 A) 0 B) 49 C) -48 D) 48 E) 50

2. Hai 2004 coriandoli (ognuno di un solo colore). Metà di essi sono blu, un quarto sono rossi e un sesto sono verdi. Quanti coriandoli sono di altri colori?

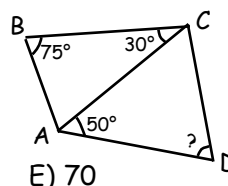
A) 167 B) 334 C) 501 D) 1002 E) 1837

3. Una piramide ha 7 facce. Quanti sono i suoi spigoli?

A) 7 B) 8 C) 12 D) 14 E) 21

4. In un quadrilatero ABCD alcuni angoli sono noti (vedi figura, dove le misure sono riportate in gradi). Si sa inoltre che il lato BC è lungo quanto il lato AD. Quanti gradi misura l'angolo $\hat{A}DC$?

A) 30 B) 50 C) 55 D) 65 E) 70



Junior

5. Giovanni e Stefano stanno giocando a ping-pong. In questo momento, se Giovanni avesse 5 punti in più ne avrebbe il doppio di Stefano, mentre se avesse 7 punti in meno ne avrebbe la metà di Stefano. Quanti punti ha Giovanni in questo momento?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

6. Alessia, Beatrice e Carla hanno raccolto complessivamente 770 noci e decidono di dividersene proporzionalmente alla loro età. In base a questo criterio, se ad Alessia toccassero 4 noci, a Carla ne toccherebbero 3; se a Beatrice toccassero 7 noci, ad Alessia ne toccherebbero 6. Quante noci di quelle raccolte spettano alla più giovane delle tre?

A) 264 B) 256 C) 218 D) 198 E) 180



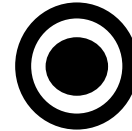
7. Il pavimento di un capannone ha forma rettangolare con lati di 40 metri e 60 metri. Lo stesso pavimento è riportato su una mappa come un rettangolo il cui perimetro misura (sulla mappa) 100 centimetri. In che scala è la mappa?

- A) 1:50 B) 1:100 C) 1:150 D) 1:160 E) 1:200

8. In un vassoio, fra biscotti e cioccolatini, vi sono 30 dolcetti in tutto. Se dal vassoio prendiamo 12 dolcetti a caso, troviamo almeno un biscotto fra di essi; se dal vassoio prendiamo 20 dolcetti a caso, troviamo almeno un cioccolatino fra di essi. Quanti biscotti vi sono nel vassoio?

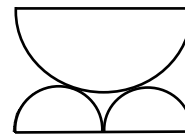
- A) 11 B) 12 C) 19 D) 20 E) 29

9. La figura mostra un bersaglio con 3 campi. Lo spessore dei due anelli, nero e bianco, è lo stesso ed è uguale al raggio del cerchio nero interno. Quanto vale il rapporto fra l'area dell'anello nero e l'area del cerchio nero interno?



- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. La figura mostra una sezione di una panchina costruita utilizzando, come indicato, tre mezzi tronchi semicirculari: due del diametro di 2 decimetri ciascuno a fare da base e uno del diametro di 4 decimetri a fare da sedile. Quanti decimetri è alta la panchina?



- A) 3 B) $\sqrt{8}$ C) 2,85 D) $\sqrt{10}$ E) 2,5

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Cinque persone scelgono un numero fra questi tre: 1, 2, 4. I cinque numeri scelti vengono moltiplicati fra loro. Uno solo fra i numeri seguenti potrebbe essere il prodotto ottenuto: quale?

- A) 100 B) 256 C) 768 D) 2048 E) 4096

12. Hai 16 carte: 4 blu (B), 4 rosse (R), 4 gialle (G) e 4 verdi (V). Vuoi collocarle nella griglia quadrata riportata nella figura, una per cella, in modo che ogni riga e ogni colonna della griglia contenga una carta per ogni colore. Hai già iniziato l'opera come indicato; in quanti diversi modi puoi completarla?

B			
R	B		
	G		
	V		

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 128



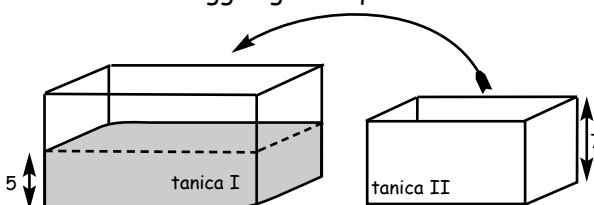
13. Quanti sono i numeri compresi fra 100 e 200 che abbiano fra i loro fattori primi soltanto i numeri 2 e/o 3?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Osserva la figura. Nella tanica I, la cui base ha una superficie di 2 decimetri quadrati, l'acqua raggiunge l'altezza di 5 centimetri. La tanica II, alta 7 centimetri e la cui base ha una superficie di 1 decimetro quadrato, viene immersa, vuota, nella tanica I fino ad essere ancorata sul fondo di questa. A questo punto una parte dell'acqua si riversa nella tanica II. Che altezza raggiunge l'acqua nella tanica II?

(Considera trascurabile lo spessore delle pareti delle taniche.)

- A) 1 cm B) 2 cm
C) 3 cm D) 4 cm
E) 5 cm



15. Un test a risposta chiusa (come Kangourou) consta di 20 domande. Per ogni risposta corretta vengono assegnati 7 punti, mentre per ogni risposta sbagliata ne vengono sottratti 2. Risposte non date sono ininfluenti (0 punti di addebito). Hai sostenuto il test e hai totalizzato 87 punti. Quante sono le domande a cui non hai dato risposta?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Junior

16. Un orologio ha un quadrante tradizionale (12 ore). La lancetta delle ore è lunga 4 centimetri, mentre quella dei minuti è lunga 8 centimetri. Qual è il rapporto fra le distanze percorse dalle punte delle due lancette tra mezzogiorno e le 15.00 di uno stesso giorno?

- A) 1:2 B) 1:4 C) 1:6 D) 1:12 E) 1:24

17. La famiglia Kangourou è stata in vacanza a Londra per alcuni giorni. Durante la vacanza, è piovuto in 15 diversi giorni, ma :

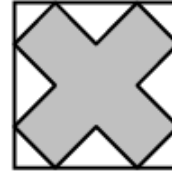
- mattine piovose sono sempre state seguite da pomeriggi asciutti;
- pomeriggi piovosi sono sempre stati preceduti da mattine asciutte;
- le mattine asciutte sono state in tutto 12 e i pomeriggi asciutti sono stati in tutto 13.

Quanti giorni è durata la vacanza?

- A) 15 B) 16 C) 19 D) 20 E) 25

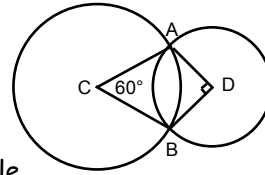


18. La figura mostra un quadrato in cui è "inscritto" un dodecagono equilatero (i due "bracci della croce" che formano il dodecagono sono fra loro perpendicolari). Il perimetro del dodecagono misura 36 centimetri. Quanto vale, in centimetri quadrati, l'area del quadrato?



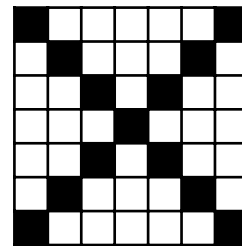
- A) 48 B) 72 C) 108 D) 115,2 E) 144

19. Osserva la figura. La circonferenza di centro C e quella di centro D si incontrano nei punti A e B . L'angolo \widehat{ACB} misura 60 gradi, mentre l'angolo \widehat{ADB} misura 90 gradi. Qual è il rapporto fra il maggiore e il minore dei due raggi delle circonferenze?



- A) 4:3 B) $\sqrt{2}:1$ C) 3:2 D) $\sqrt{3}:1$ E) 2:1

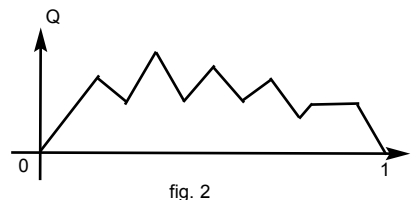
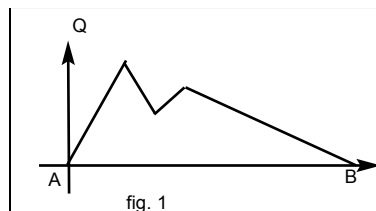
20. Un mosaico quadrato di lato 2003 è ottenuto accostando piastrelle bianche e piastrelle grigie di lato 1. Le piastrelle grigie sono tutte e sole quelle centrate sulle diagonali (come nella figura, dove la situazione è rappresentata per un quadrato di lato 7). Quante sono le piastrelle bianche?



- A) 2002^2 B) 2002×2001 C) 2003^2
D) 2003×2004 E) 2004^2

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

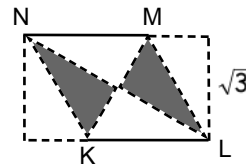
21. Un alpinista molto distratto attraversa una montagna seguendone fedelmente il profilo illustrato in figura 1, dunque senza mai percorrere tratti in orizzontale. L'alpinista si porta dal punto A al punto B , ma di tanto in tanto ritorna sui suoi passi per cercare effetti personali che ha perduto. Il diagramma in figura 2 vede in ascissa il tempo t e in ordinata la quota Q (espressa rispetto alla stessa unità di misu-



ra della figura 1) e mostra, istante per istante, la quota a cui si trova l'alpinista (all'istante 0 egli parte da A mentre all'istante 1 raggiunge B). Quante volte l'alpinista è tornato indietro per cercare qualcosa?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22. Il rombo KLMN in figura è ottenuto ripiegando due vertici opposti di un opportuno rettangolo fino a farli combaciare con il punto di mezzo della diagonale. Il più corto dei lati del rettangolo misura $\sqrt{3}$. Quanto misura l'area del rombo?

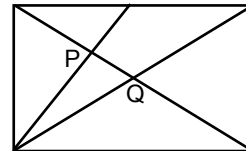


- A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $3\sqrt{2}$

23. Partiamo con 200 numeri tutti uguali a zero scritti in successione. Al primo passaggio aggiungiamo 1 ad ognuno dei duecento numeri. Al secondo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di 2 (cioè a quelli di posto pari). Al terzo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di 3 e procediamo secondo questa legge: all'n-esimo passaggio aggiungiamo 1 solo ai numeri il cui posto è un multiplo di n. Dopo 200 passaggi, che numero troviamo al posto 120?

- A) 16 B) 12 C) 8 D) 32 E) 24

24. Osserva la figura. Vi è rappresentato un rettangolo in cui sono tracciate le diagonali e il segmento che unisce un vertice al punto medio di uno dei lati che non vi confluiscono. Quanto vale il rapporto fra la lunghezza delle diagonali e la lunghezza del segmento PQ?

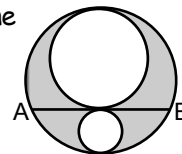


- A) non è possibile rispondere perché dipende dalle misure del rettangolo
B) 6 C) $13/3$ D) 4 E) 3

25. Quelli in figura sono cerchi. L'area della regione ombreggiata vale 2π . Quanto è lungo il segmento AB?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

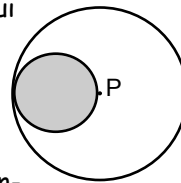
E) non è possibile rispondere perché dipende dai raggi dei cerchi








26. Una passatoia rettangolare è realizzata con un tappeto dello spessore di 1 centimetro che, arrotolato su se stesso per tutta la sua lunghezza, fornisce un cilindro la cui base è (approssimativamente) un cerchio di diametro 1 metro. Quale dei seguenti numeri si avvicina di più alla lunghezza della passatoia espressa in metri?

- A) 20 B) 50 C) 75 D) 150 E) 300

27. La figura mostra due cerchi fra loro tangenti i cui raggi stanno in rapporto 1:2. Il cerchio piccolo rotola continuamente, senza strisciare, all'interno del cerchio grande, lungo il bordo di quest'ultimo che gli fa da guida. Quale fra le seguenti è la traiettoria percorsa dal punto P del cerchio piccolo che, nell'istante cui si riferisce la figura, si trova al centro del cerchio grande?



- A)  B)  C)  D)  E) 

28. Quanti numeri interi n di esattamente tre cifre (in rappresentazione decimale), non superiori a 200, sono tali che il prodotto $(n+1)(n+2)(n+3)$ sia divisibile per 7?

- A) 43 B) 31 C) 34 D) 24 E) 39

29. Alla lavagna sono stati scritti, in ordine crescente, tutti i numeri interi da 1 a 10000. Sono poi stati cancellati tutti e soli quei numeri che non sono divisibili né per 5 né per 11, ottenendo una nuova successione. Quale fra i numeri rimasti si viene a trovare al 2004-simo posto di questa nuova successione?

- A) 1000 B) 5000 C) 10000 D) 6545 E) 7348

30. Determina quanti sono i numeri di dieci cifre che soddisfano i seguenti requisiti: la prima cifra è 1, tutte le rimanenti nove cifre sono 0 oppure 1, la somma delle cifre di posto dispari è uguale alla somma delle cifre di posto pari.

- A) 29 B) 126 C) 81 D) 32 E) 64



SOLUZIONI JUNIOR 2004

1. (D) Ogni espressione racchiusa fra parentesi vale -1 .
2. (A) Si ha $(1/2) + (1/4) + (1/6) = 11/12$ e $2004/12 = 167$.
3. (C) La piramide deve avere base esagonale.
4. (D) L'angolo BAC misura $180 - 105 = 75$ gradi, per cui $BC = AC$ e quindi $AC = AD$. Ne segue che l'angolo ADC misura $(180 - 50)/2 = 65$ gradi.

5. (D) G sia il punteggio di Giovanni e S quello di Stefano. Il sistema
$$\begin{cases} G + 5 = 2S \\ G - 7 = \frac{S}{2} \end{cases}$$

fornisce $G = 11$.

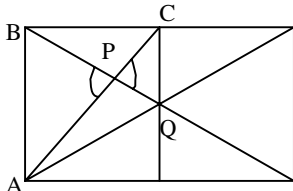
6. (D) A , B e C siano le età rispettivamente di Alessia, Beatrice e Carla. Da $B/A = 7/6$ e $A/C = 4/3$ si ottiene che, se a Beatrice spettano 14 noci, ad Alessia ne spettano 12 e a Carla 9. Si ha $770 : (14 + 12 + 9) = 22$ e $22 \times 9 = 198$.
7. (E) Il perimetro reale è di 20.000 centimetri: $100/20.000 = 1/200$.
8. (C) I cioccolatini non possono essere più di 11 e i biscotti non possono essere più di 19.
9. (D) Se il raggio del cerchio interno è 1, quello del cerchio mediano è 2 e quello del cerchio esterno è 3. L'area dell'anello esterno è allora $(9 - 4)\pi = 5\pi$, mentre l'area del cerchio interno è π .
10. (B) L'altezza richiesta è la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura quanto la somma dei due raggi e l'altro cateto quanto il minore dei raggi.

$$\sqrt{(2+1)^2 - 1} = \sqrt{8}.$$

11. (B) Il risultato deve essere una potenza (intera) di 2 non superiore a $4^5 = 2^{10} = 1024$ (ogni tale potenza è un risultato possibile).
12. (C) Le scelte che completano le prime due colonne sono obbligate. La terza consente la doppia scelta VG o GV per i primi due posti dall'alto e, indipendentemente, BR o RB per gli altri due. Riempita la terza colonna, la quarta è determinata.
13. (D) Poiché $3^4 < 100$ e $3^5 > 200$, non vi sono potenze di 3 fra i numeri cercati. Questi sono dunque ottenibili moltiplicando 3^k , con $0 \leq k \leq 4$, per opportune potenze di 2. È facile constatare che, per ogni valore di k , una e una sola potenza di 2 è accettabile. Vi sono dunque esattamente 5 numeri con le proprietà richieste.
14. (C) la prima vasca contiene 1000 cm cubi di acqua. Quando la seconda vasca viene immersa nella prima, dimezza la superficie di base disponibile. Se la seconda vasca fosse sufficientemente alta, l'acqua raggiungerebbe l'altezza di 10 cm: dovendosi fermare a 7, 300 cm cubi travasano nella seconda vasca, dove la superficie di base è di 100 cm quadrati, raggiungendo quindi in essa l'altezza di 3 cm.
15. (D) Poiché 87 non è multiplo di 7, sono state date risposte sbagliate: sia S il loro numero e sia G il numero delle risposte giuste. G deve essere dispari (poiché il numero dei punti sottratti è pari) e deve essere tale che $7G > 87$: dunque $G \geq 13$. Se fosse $G \geq 15$, si avrebbe $G + S > 20$. Allora $G = 13$ e $S = 2$, per cui le risposte non date sono 5.
16. (E) Quando la lancetta delle ore compie un quarto di giro, quella dei minuti compie 3 giri completi. Se avessero la stessa lunghezza, il rapporto sarebbe $1/12$: nel nostro caso è $1/24$ (la lunghezza della circonferenza varia proporzionalmente al raggio).
17. (D) Non vi è mai stata un'intera giornata di pioggia, quindi $(13 + 12 - 15)/2 = 5$ è il numero delle giornate interamente asciutte.
18. (B) Ogni lato del dodecagono misura 3 cm. Il quadrato è decomponibile in triangoli che, opportunamente accostati, consentono di ottenere 8 quadrati ciascuno di 3 centimetri di lato.

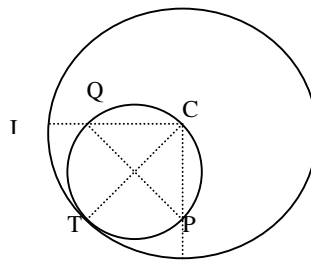
19. (B) Il triangolo ACB è equilatero, per cui si ha $\overline{AB} + \overline{CA}$. Allora il raggio del cerchio grande misura quanto la diagonale di un quadrato il cui lato misura quanto il raggio del cerchio piccolo.
20. (A) I quadratini ombreggiati sono $2003 + 2002$. Ora si può ragionare in due modi, il primo dei quali costituisce la visualizzazione grafica delle operazioni algebriche presenti nel secondo. 1) I quadratini presenti nella prima riga o nella prima colonna sono proprio $2003 + 2002$: sopprimendoli si ottiene un quadrato di lato 2002 . 2) Si ha $(2003)^2 - 2003 - 2002 = (2003)^2 - 2 \times 2003 + 1 = (2003 - 1)^2$.
21. (C) L'alpinista non sarebbe mai tornato indietro se e solo se, a meno di tratti orizzontali corrispondenti a soste, il diagramma in fig. 2 corrispondesse al profilo in fig. 1. le deviazioni, verso l'alto o verso il basso, da tale profilo sono 3.
22. (C) Le diagonali del rettangolo misurano $2\sqrt{3}$, quindi l'altro lato misura 3. Poiché i 6 rettangoli che appaiono in figura sono congruenti, l'area del rombo è $\frac{2}{3}$ di quella del rettangolo.
23. (A) Lo zero che si trova all' n -esimo posto dopo n passi ha subito l'aggiunta di 1 tante volte quanti sono i divisori interi di n , 1 e n inclusi, e l' n -esimo passo è l'ultimo in cui viene aggiunto 1. I divisori interi di 120 sono 16.

24. (B)



I triangoli ABP e CQP sono simili e $\overline{AB} = 2\overline{CQ}$, dunque $\overline{BP} = 2\overline{PQ}$.

25. (D) Se R è il raggio del cerchio più grande e r quello del cerchio più piccolo. Il raggio del cerchio mediano è $R - r$. Per il teorema di Pitagora si ha $\overline{AB} = 4\sqrt{rR - r^2}$, mentre da $\pi R^2 - \pi(R - r)^2 - \pi r^2 = 2\pi$ si ricava $rR - r^2 = 1$.
26. (C) Un cerchio di un metro di diametro ha una superficie di 2500π centimetri quadrati. Si ha $7750 < 2500\pi < 8000$, da cui la risposta.
27. (A) per ragioni di simmetria, è sufficiente studiare la traiettoria di P fino all'istante in cui arriva a toccare la circonferenza esterna.



Sia Q il punto opposto a P sulla circonferenza piccola e C il centro di quella grande; nel generico istante successivo a quello iniziale, sia T il punto di tangenza. All'istante iniziale è $T = I = Q$, all'istante finale sarà $T = P$ e $Q = C$. Chiaramente l'angolo QCP è retto. Ma l'arco QT (circonferenza piccola) è lungo quanto l'arco IT (circonferenza grande): per una nota proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza e per il rapporto fra i raggi, ne segue che Q giace sul segmento IC .

28. (A) 7 è primo. Dunque affinché $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ sia divisibile per 7 occorre che un fattore lo sia. Il primo numero più grande di 100 divisibile per 7 è 105, il primo più grande di 200 è 203. Dunque deve essere $n \in \{103, 104, 105\} + \{k7\}_{k=0}^{\frac{203-105}{7}} \setminus \{201, 202\}$. Questo insieme ha $15 \times 3 - 2 = 43$ elementi.

- 29. (E)** I numeri che rimangono sono quelli validi da 5 a $5 \times 11 = 55$ (che sono 15) con ripetizione di questo blocco fin dove serve. Si ha $2004 = 15 \times 133 + 9$. Il nono numero del blocco è 33. Il numero cercato è $133 \times 55 + 33 = 7348$.
- 30. (B)** Il complesso delle cifre $a_3a_5a_7a_9$ può contenere da zero a quattro volte la cifra "1". In corrispondenza, il complesso delle cifre di posto pari deve contenere rispettivamente da una a cinque volte la cifra "1". Nella somma che segue, gli addendi indicano quanti numeri diversi si possono ottenere passando in rassegna, nell'ordine sopra indicato, le cinque possibilità. $5 + 4 \times 10 + 6 \times 10 + 4 \times 5 + 1 = 126$.