Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO JUNIOR

J1. *(5 punti)* Esistono basi in cui l'espressione 15×15=321 risulta corretta?

J2. *(7 punti)* Per quali coppie (x, y) di numeri interi relativi è vero che $x^2 + y^2 + xy = 1$?

J3. *(11 punti)* Ho scritto su 5 foglietti altrettanti numeri interi positivi. Sommandoli a due a due in tutti i modi possibili, ottengo i seguenti dieci risultati: 17, 20, 28, 14, 36, 28, 25, 31, 39 e 42. Quali numeri ho scritto?

J4. *(14 punti)* Dato un triangolo ABC rettangolo in C si considerino i punti A' simmetrico di A rispetto a BC, B' simmetrico di B rispetto ad AC e C' simmetrico di C rispetto ad AB. Quanto vale il rapporto tra l'area di $A'B'C'$ e quella di ABC?

J5. *(18 punti)* Ogni casella di una tabella rettangolare formata da m righe ed n colonne contiene un numero intero. Le mosse consentite sono

- cambiare i segni degli elementi di un'intera riga
- cambiare i segni degli elementi di un'intera colonna.

È vero che dopo un numero opportuno di queste mosse, ogni riga è formata da elementi la cui somma non è negativa ed così pure ogni colonna? Motiva.

J6. *(22 punti)* È possibile permutare le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in modo che per ogni $n \in \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ il numero formato dalle prime n cifre (partendo da sinistra) sia divisibile per n? In caso affermativo, la permutazione è unica?

Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

LIVELLO JUNIOR

J1. *(5 punti)* Esistono basi in cui l'espressione 15×15=321 risulta corretta?

Soluzione. Sì, la base 6. Infatti detta b la base deve risultare $(b+5)^2=3b^2+2b+1$ cioè $2b^2-8b-24=0$ che ha come sola soluzione positiva $b=6$.

J2. *(7 punti)* Per quali coppie (x, y) di numeri interi relativi è vero che $x^2 + y^2 + xy = 1$?

Soluzione. Moltiplicando per 2 entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = (x + y)^2 + x^2 + y^2 = 2.$$

La somma di 3 numeri interi non negativi (come sono i quadrati) è 2 solo se due sono =1 e uno è =0. Ne segue che i due numeri x e y possono essere solo –1, 0 o 1. Allora le coppie ammissibili sono solo (–1,1), (1, –1), (–1,0), (1,0), (0, –1), (0,1).

J3. *(11 punti)* Ho scritto su 5 foglietti altrettanti numeri interi positivi. Sommandoli a due a due in tutti i modi possibili, ottengo i seguenti dieci risultati: 17, 20, 28, 14, 36, 28, 25, 31, 39 e 42. Quali numeri ho scritto?

Soluzione. Denotiamo i 5 numeri con *a, b, c, d, e*. Se

$$a \le b \le c \le d \le e,$$

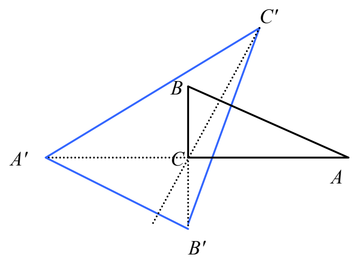
allora $a+b \le a+c$ (e queste sono le 2 somme più piccole) e $c+d \le c+e$ (e queste sono le 2 somme più grandi). Scriviamo le 10 somme in ordine crescente: 14, 17, 20, 25 ,28, 28, 31, 36, 39, 42. Allora deve essere

$$a+b = 14,\ a+c = 17,\ d+e = 42,\ c+e = 39.$$

Se sommiamo fra loro le 10 somme, otteniamo 280 e questo numero coincide con $4(a+b+c+d+e)$, per cui la somma dei 5 numeri che cerchiamo vale 70. Da $a+b = 14$ e $d+e = 42$ segue $c = 14$. Allora i 5 numeri sono 3, 11, 14, 17, 25.

J4. *(14 punti)* Dato un triangolo ABC rettangolo in C si considerino i punti A' simmetrico di A rispetto a BC, B' simmetrico di B rispetto ad AC e C' simmetrico di C rispetto ad AB. Quanto vale il rapporto tra l'area di $A'B'C'$ e quella di ABC?

Soluzione.



$A'B'C$ è simmetrico di ABC rispetto a C e ABC' lo è rispetto ad AB: quindi le perpendicolari tracciate da C alle due ipotenuse $A'B'$ e AB stanno sulla stessa retta che è la perpendicolare da C' ad $A'B'$. Visto che la distanza tra C e C' è doppia di quella tra C e l'ipotenusa $A'B'$ l'altezza relativa ad $A'B'$ del nuovo triangolo è 3 volte quella relativa ad AB nel vecchio, ed essendo $AB=A'B'$ si vede che anche l'area del nuovo triangolo è 3 volte quella del vecchio.

J5. *(18 punti)* Ogni casella di una tabella rettangolare formata da m righe ed n colonne contiene un numero intero. Le mosse consentite sono

- cambiare i segni degli elementi di un'intera riga
- cambiare i segni degli elementi di un'intera colonna.

È vero che dopo un numero opportuno di queste mosse, ogni riga è formata da elementi la cui somma non è negativa ed così pure ogni colonna? Motiva.

Soluzione. Sì. Le configurazioni sono in numero finito e quindi esiste una configurazione in cui la somma di tutti i numeri che compaiono in tabella è massima. Questa è la configurazione cercata: in caso contrario cambiando i segni di una riga (o di una colonna) a somma negativa si aumenterebbe la somma totale.

J6. *(22 punti)* È possibile permutare le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in modo che per ogni $n \in \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ il numero formato dalle prime n cifre (partendo da sinistra) sia divisibile per n? In caso affermativo, la permutazione è unica?

Soluzione. La divisibilità per 9 è automaticamente assicurata dal fatto che la somma delle cifre (45) è divisibile per 9. Il numero ottenuto accostando le cifre permutate ha la forma $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ ove $a_1a_2a_3a_4a_5$ divisibile per 5 implica $a_5=5$. Inoltre a_2, a_4, a_6, a_8 sono cifre pari (essendo la cifra delle unità di un numero divisibile per multipli di 2) e le altre dispari; in più, visto che le centinaia sono sicuramente divisibili per 4 e le migliaia per 8, a_3a_4 è divisibile per 4 e $a_6a_7a_8$ per 8. Ora

- 3 divide a_45a_6 con a_4, a_6 cifre pari $\Rightarrow a_4+a_6=10 \Rightarrow \{a_4, a_6\}=\{2,8\}$ oppure $\{a_4, a_6\}=\{4,6\}$
- visto che a_38 e a_34 con a_3 dispari non sono divisibili per 4 si deve avere $a_4=2$ e $a_6=8$ oppure $a_4=6$ e $a_6=4$.

Dunque il numero ha la forma $a_1a_2a_3\mathbf{258}a_7a_8a_9$ oppure $a_1a_2a_3\mathbf{654}a_7a_8a_9$. Osserviamo che:
3 divide $a_1a_2a_3$ con a_1, a_3 cifre dispari $\Rightarrow$ 6 divide $a_1+a_2+a_3$
Esaminiamo ora i due casi nell'ordine dato.

1. Le uniche cifre pari rimaste sono 4 e 6 e perché $\mathbf{8}a_7a_8$ sia divisibile per 8, deve esserlo a_7a_8: ciò esclude $a_8=4$, visto che 14, 34, 74, 94 sono tutti non divisibili per 8. Dunque $a_8=6$ e $a_2=4$. Cioè il numero ha la forma $a_1\mathbf{4}a_3\mathbf{258}a_7\mathbf{6}a_9$ ed $a_7=9$, visto che 96 è divisibile per 8, mentre 36 non lo è.
   Ora 6 divide $a_1+\mathbf{4}+a_3$ solo se $a_1+a_3=8=1+7$ (non può essere $a_1+a_3=14$, poiché 14=7+7=5+9 sono le uniche scelte e non sono ammissibili).
   Dunque il numero potrebbe essere: 147258963 o 741258963.
   Ora **1472589** è divisibile per 7 se e solo se 1+4×5+7×4+2×6+5×2+8×3+9 è divisibile per 7, cioè (usando le congruenze modulo 7) se e solo se lo è 1+6+0+5+3+3+2: FALSO.
   Similmente **7412589** è divisibile per 7 se e solo se 7+4×5+1×4+2×6+5×2+8×3+9 è divisibile per 7, cioè (usando le congruenze modulo 7) se e solo se lo è 0+6+4+5+3+3+2: FALSO.
   Dunque il primo caso non si può verificare.
2. Le uniche cifre pari rimaste sono 2 e 8 e perché $\mathbf{4}a_7a_8$ sia divisibile per 8, deve esserlo a_7a_8: ciò esclude $a_8=8$ (visto che 18, 38, 78, 98 sono tutti non divisibili per 8) e richiede $a_7 \in \{3,7\}$ per motivi analoghi. Visto che $a_8=2$ e $b=8$, il numero ha la forma $a_1\mathbf{8}a_3\mathbf{654}a_7\mathbf{2}a_9$.
   Ora 6 divide $a_1+\mathbf{8}+a_3$ solo se $a_1+a_3=4=1+3$, oppure $a_1+a_3=10=1+9$ (=3+7, ma è da scartare visto che almeno una di queste cifre sta nel posto *f*), oppure $a_1+a_3=16=7+9$.
   Dunque il numero potrebbe essere: **1836547**2**9** o **3816547**2**9** oppure **1896547**2**3**,**1896543**2**7**, **9816547**2**3** oppure **9816543**2**7**, oppure **7896543**2**1** o **9876543**2**1**.
   Tutto si gioca sulla divisibilità per 7 dei numeri evidenziati in giallo. Nell'ordine:
   1+8×5+3×4+6×6+5×2+4×3+7≡1+5+5+1+3+5+0: FALSO.
   3+8×5+1×4+6×6+5×2+4×3+7≡3+4+5+1+3+5+0: VERO.
   1+8×5+9×4+6×6+5×2+4×3+7≡1+5+1+1+3+5+0: FALSO.
   1+8×5+9×4+6×6+5×2+4×3+3≡1+5+1+1+3+5+3: FALSO.
   9+8×5+1×4+6×6+5×2+4×3+7≡2+5+4+1+3+5+0: FALSO.
   9+8×5+1×4+6×6+5×2+4×3+3≡2+5+4+1+3+5+3: FALSO.
   7+8×5+9×4+6×6+5×2+4×3+3≡0+5+1+1+3+5+3: FALSO.
   9+8×5+7×4+6×6+5×2+4×3+3≡2+5+0+1+3+5+3: FALSO.

Dunque c'è una sola permutazione soluzione, quella che manda 123456789 in **381654729**.