Kangourou della Matematica 2004
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 5 maggio 2004

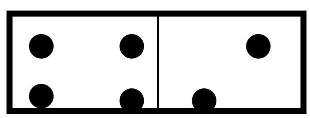
LIVELLO ÈCOLIER

E1. *(5 punti)* Nel gioco del *TRIS* due giocatori A e B collocano a turno il proprio simbolo ("X" per il giocatore A, "O" per il giocatore B) in una casella della scacchiera. Vince il primo che riesce a posizionare tre suoi simboli in orizzontale o in verticale o in diagonale. Nella tabella vedi una partita iniziata. Sei il giocatore A e tocca a te collocare il tuo simbolo "X": inseriscilo in modo da essere certo di vincere.

X	**O**	**X**
		O

E2. *(7 punti)* Un cubo in legno di lato 11 cm, ottenuto incollando insieme $11 \times 11 \times 11$ cubetti di lato 1 cm, è appoggiato su un tavolo. Qual è il massimo numero di cubetti unitari di cui posso vedere almeno una faccia, se posso scegliere la posizione da cui osservare il cubo grande, ma una volta operata la scelta non mi posso più muovere?

E3. *(11 punti)* Una variante del gioco del domino contiene tutte le tessere con le coppie di numeri tra doppio zero e doppio otto. Ogni coppia di numeri si trova esattamente una volta. Per esempio la tessera in figura è la 2 – 4 ma anche la 4 – 2. Quante tessere si hanno a disposizione per il gioco?



E4. *(14 punti)* Un percorso lungo 1800 metri è suddiviso in 15 parti, uguali fra loro, piantando nel terreno 16 bandierine rosse; è anche suddiviso in 6 parti, uguali fra loro, piantando nel terreno 7 bandierine verdi. Qual è, in metri, la minima distanza tra due punti distinti del percorso marcati entrambi da una bandierina rossa e da una bandierina verde?

E5. *(18 punti)* Lo schermo del mio computer permette di scrivere 80 caratteri (lettere, cifre o spazi bianchi) su ogni riga. Se non vi è abbastanza spazio per una parola o per un numero alla fine della riga, la parola o il numero viene interamente spostata alla riga successiva. Scrivo i numeri da 1 a 150 (in cifre) e lascio uno spazio bianco tra ogni numero ed il suo successivo. Quanti spazi bianchi restano sull'ultima riga dopo l'ultimo zero?

E6. *(22 punti)* Per Pasqua la nonna ha fatto trovare a noi nipoti una cesta con tanti ovetti di Pasqua. Venuto il momento di dividerli, la nonna ha inventato questo criterio, che tiene conto del diritto di priorità nella scelta dei nipoti più grandi e della gola dei più piccoli: il primo nipote avrebbe preso 1 ovetto e la sesta parte degli ovetti rimanenti, il secondo 2 ovetti e la sesta parte dei rimanenti, il terzo 3 ovetti e la sesta parte dei rimanenti e così via fino ad esaurire le uova. Con nostra sorpresa le divisioni sono sempre risultate esatte e alla fine… avevamo tutti lo stesso numero di ovetti! La nonna ha commentato che con più ovetti non avrebbe potuto fare lo stesso miracolo. Quanti siamo e quanti ovetti c'erano nel cesto?

LIVELLO ÈCOLIER

E1. *(5 punti)* Nel gioco del *TRIS* due giocatori A e B collocano a turno il proprio simbolo ("X" per il giocatore A, "O" per il giocatore B) in una casella della scacchiera. Vince il primo che riesce a posizionare tre suoi simboli in orizzontale o in verticale o in diagonale. Nella tabella vedi una partita iniziata. Sei il giocatore A e tocca a te collocare il tuo simbolo "X": inseriscilo in modo da essere certo di vincere.

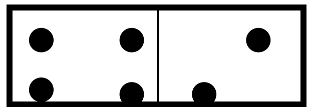
X	**O**	**X**
X		**O**

Soluzione. A deve posizionarsi sulla terza riga, prima colonna poiché le X dominano solo una colonna e una diagonale completamente sgombre: questa posizione, all'intersezione delle due, dà 2 possibili scelte, entrambe vincenti al passo successivo.

E2. *(7 punti)* Un cubo in legno di lato 11 cm, ottenuto incollando insieme $11 \times 11 \times 11$ cubetti di lato 1 cm, è appoggiato su un tavolo. Qual è il massimo numero di cubetti unitari di cui posso vedere almeno una faccia, se posso scegliere la posizione da cui osservare il cubo grande, ma una volta operata la scelta non mi posso più muovere?

Soluzione. Posso vedere al più tre facce del cubo (quelle che convergono in un unico vertice). Ciascuna di queste mostra 11×11 facce di cubetti, alcune delle quali però appartengono allo stesso cubetto: precisamente 2 facce appartengono allo stesso cubetto se il cubetto sta su uno spigolo ma non nel vertice visibile del cubo e 3 appartengono allo stesso cubetto se il cubetto sta nel vertice del cubo. Dunque si hanno $3 \times (10 \times 10) + 3 \times 10 + 1 = 331$ cubetti.

E3. *(11 punti)* Una variante del gioco del domino contiene tutte le tessere con le coppie di numeri tra doppio zero e doppio otto. Ogni coppia di numeri si trova esattamente una volta. Per esempio la tessera in figura è la 2 – 4 ma anche la 4 – 2. Quante tessere si hanno a disposizione per il gioco?



Soluzione. Le possibili scelte di accostamento, fissato come primo numero 0, sono 9; le possibili scelte, diverse dalle precedenti, fissato come primo numero 1, sono 8 e così via, fino al numero 8 in cui l'unica scelta di accostamento non ancora fatta è 8. In totale 9+8+…+2+1=45.

E4. (14 punti*)* Un percorso lungo 1800 metri è suddiviso in 15 parti, uguali fra loro, piantando nel terreno 16 bandierine rosse; è suddiviso in 6 parti, uguali fra loro, piantando nel terreno 7 bandierine verdi. Qual è, in metri, la minima distanza tra due punti distinti del percorso marcati entrambi da una bandierina rossa e da una bandierina verde?

Soluzione: I tratti limitati da due bandierine rosse sono lunghi 120 metri, quelli limitati da due verdi sono lunghi 300 metri. A parte la posizione di partenza e di fine del percorso, si troverà una coppia di bandierine solo a 600 metri e a 1200 metri poiché 600, 1200 e 1800 sono gli unici numeri multipli tanto di 120 che di 300 compresi tra 0 e 1800. Quindi la minima distanza tra due punti distinti del cammino marcati entrambi da una bandierina rossa e da una bandierina verde è di 600 metri.

E5. *(18 punti)* Lo schermo del mio computer permette di scrivere 80 caratteri (lettere, cifre o spazi bianchi) su ogni riga. Se non vi è abbastanza spazio per una parola o per un numero alla fine della riga, la parola o il numero viene interamente spostata alla riga successiva. Scrivo i numeri da 1 a 150 (in cifre) e lascio uno spazio bianco tra ogni numero ed il suo successivo. Quanti spazi bianchi restano sull'ultima riga dopo l'ultimo zero?

Soluzione. I numeri da 1 a 9 occupano 18 posizioni della prima riga; le restanti 62 permettono di allocare altri (62+1):3=21 numeri: quindi si arriva a 30; sulle 2 righe successive possono essere allocati (80+1):3=27 numeri e quindi l'ultimo numero della terza riga è 84. I numeri da 85 a 99 occupano 45 posizioni; le restanti 35 della quarta riga sono occupati da 9 numeri (da 100 a 108). Per ciascuna delle righe successive posso allocare 80:4=20 numeri, quindi in 2 righe arrivo a 148. Sulla settima riga devo allocare 2 numeri e quindi occupo 4+3=7 spazi e me ne restano 73 bianchi.

E6. *(22 punti)* Per Pasqua la nonna ha fatto trovare a noi nipoti una cesta con tanti ovetti di Pasqua. Venuto il momento di dividerli, la nonna ha inventato questo criterio, che tiene conto del diritto di priorità nella scelta dei nipoti più grandi e della gola dei più piccoli: il primo nipote avrebbe preso 1 ovetto e la sesta parte degli ovetti rimanenti, il secondo 2 ovetti e la sesta parte dei rimanenti, il terzo 3 ovetti e la sesta parte dei rimanenti e così via fino ad esaurire le uova. Con nostra sorpresa le divisioni sono sempre risultate esatte e alla fine… avevamo tutti lo stesso numero di ovetti! La nonna ha commentato che con più ovetti non avrebbe potuto fare lo stesso miracolo. Quanti siamo e quanti ovetti c'erano nel cesto?

Soluzione. Il numero totale X di ovetti deve essere pari a 1 + un multiplo di 6 (altrimenti il primo nipote facendo la divisione per 6 non troverebbe un numero esatto di ovetti); inoltre X deve essere divisibile per il numero di nipoti (visto che tutti hanno avuto lo stesso numero di ovetti); posso allora prendere X=6+1, X=12+1, X=18+1, ma in tutti questi casi il numero X è divisibile solo per sé stesso e per 1 e questo implicherebbe che ci fosse 1 solo nipote (ma allora le uova alla fine non sarebbero esaurite) oppure ci fossero X nipoti (ma allora nessuno avrebbe avuto più di un uovo, contrariamente a quanto si inferisce dal problema. Passando a X=24+1 si vede che al primo nipote toccano 1+(24:6)=5 uova, al secondo 2+((25−5)−2):6=5 uova, al terzo 3+((25−10)−3):6=5 uova, al quarto 4+((25−15)−4):6=5 uova e all'ultimo ne restano (25−20)=5 che prende senza fare ulteriori operazioni. Dunque noi siamo 5 e gli ovetti erano 25. Il commento della nonna garantisce che questa è l'unica soluzione possibile, cosa che è possibile dimostrare, ma con qualche conoscenza matematica in più.