



Kangourou Italia
Gara del 20 marzo 2003
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta superiore



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti

1. Nel viaggio in treno verso Mirabilandia, Lisa è seduta nella settima carrozza dalla testa del treno, mentre Marco è seduto nella sesta carrozza dalla coda; Marco è più vicino di Lisa alla testa del treno e tra le loro carrozze vi è un'altra carrozza. Da quante carrozze è composto il treno?

- A) 15 B) 14 C) 13 D) 10 E) risposta indeterminata

2. L'area del quadrato della figura 1 vale "a"; chiamiamo "b" l'area di ciascuno dei cerchi delle figure 1 e 2. Nella figura 2, i tre cerchi allineati sono racchiusi da un elastico. Se l'elastico viene accorciato in modo che sia in tensione, senza cambiare la posizione dei tre cerchi, qual è l'area della figura delimitata dall'elastico?

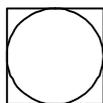


Fig. 1

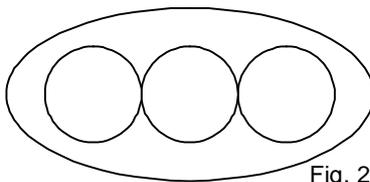


Fig. 2

- A) 3b
 B) 2a+b
 C) a+2b
 D) 3a
 E) a+b

3. Andrea ha calcolato il volume di una sfera, ma, nell'applicare la nota formula, ha usato per errore il diametro invece del raggio. Che cosa dovrebbe fare del risultato ottenuto, per giungere alla risposta corretta?

- A) Dividerlo per due B) Dividerlo per quattro. C) Dividerlo per sei.
 D) Dividerlo per otto. E) Dividerlo per sedici.

4. $2^{\frac{n+2003}{2}} + 2^{\frac{n+2003}{2}} =$

- A) $2^{\frac{n+2004}{2}}$ B) $2^{2n+4006}$ C) $4^{2n+4006}$ D) $4^{2n+2003}$ E) $4^{\frac{n+2003}{2}}$

5. Per quale delle seguenti combinazioni di lati e angoli esiste un triangolo ABC univocamente determinato?

- A) AB = 11cm, BC = 19cm, CA = 7cm
 B) AB = 11cm, BC = 6cm, ? BAC (cioè misura dell'angolo BAC) = 63°
 C) AB = 11cm, CA = 7cm, ? CBA = 128°
 D) AB = 11cm, ? BAC = 63°, ? CBA = 128°
 E) Nessuna delle precedenti.



6. La media degli studenti promossi da una certa scuola, nei quattro anni 1999 - 2002 è stata di 325 studenti all'anno, mentre nei cinque anni 1999 - 2003 la media è stata superiore del 20%. Quanti studenti sono stati promossi dalla scuola nel 2003?

- A) 650 B) 600 C) 455 D) 390 E) 345

7. Tiriamo due dadi (con le facce numerate da 1 a 6, come d'uso), osserviamo i punteggi riportati sulle facce superiori e calcoliamone la differenza. Qual è il valore più probabile per il valore assoluto di tale differenza?

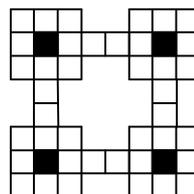
- A) Tutti numeri fra 0 e 5 sono equiprobabili B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8. L'insieme di tutti i valori del parametro m per cui le curve di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $y = x^2 + m$ hanno esattamente un unico punto in comune è

- A) $\{-5/4, -1, 1\}$ B) $\{-5/4, 1\}$ C) $\{-1, 1\}$ D) $\{-5/4\}$ E) $\{1\}$

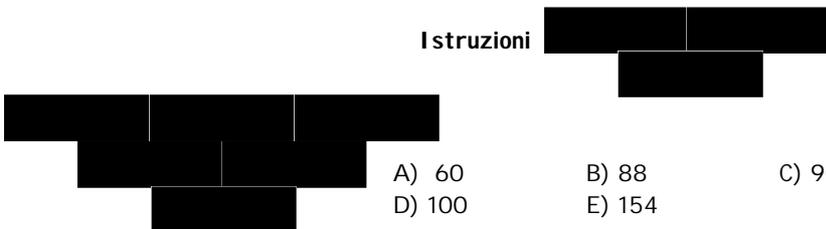
9. Quanti modi distinti vi sono di ricoprire tutte le caselle bianche della scacchiera in figura, usando le usuali tessere da domino 1×2 ?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128



10. Costruiamo un triangolo numerico ponendo in ogni casella un numero intero maggiore di 1, seguendo le istruzioni mostrate sotto. Quale dei seguenti numeri non può apparire nella casella ombreggiata?

Istruzioni

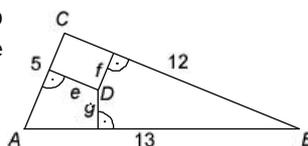


I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti

11. Sia ABC un triangolo e sia D un punto interno al triangolo, avente distanze e, f, g dai lati come nella figura (che evidenzia le misure dei lati).

Qual è il valore dell'espressione $5e + 12f + 13g$?

- A) 120 B) 90 C) 60 D) 30 E) Non è possibile determinare il valore senza ulteriori informazioni sulla posizione di D .





12. Due gabbiani bianchi e otto gabbiani grigi volano su un fiume. All'improvviso atterrano su una delle sponde del fiume, disponendosi in linea retta in ordine casuale. Qual è la probabilità che i due gabbiani bianchi si trovino uno accanto all'altro?

- A) 1/5 B) 1/6 C) 1/7 D) 1/8 E) 1/9

13. $\sqrt{1?2000\sqrt{1?2001\sqrt{1?2002\sqrt{1?2003?2005}}}}$?

- A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

14. 12, 13 e 15 sono le lunghezze (non necessariamente in quest'ordine) di due lati di un triangolo acutangolo e dell'altezza relativa al terzo lato. Determinare l'area del triangolo.

- A) 168 B) 80 C) 84 D) $6\sqrt{65}$
E) l'area non è univocamente determinata

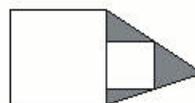
15. Un computer stampa la lista delle settime potenze dei numeri naturali, cioè la successione $1^7, 2^7, 3^7, \dots$ etc. Quanti termini di questa successione sono strettamente compresi tra i numeri 5^{21} e 2^{49} ?

- A) 13 B) 8 C) 5 D) 3 E) 2

16. Sapendo che $10^n + 1$ è un multiplo di 101 e n è un numero di due cifre, qual è il massimo valore possibile per n ?

- A) 92 B) 94 C) 96 D) 98 E) 99

17. La figura mostra due quadrati, aventi lati di lunghezza 2 m e 1 m rispettivamente. Qual è l'area della regione ombreggiata?



- A) 1 m^2 B) 2 m^2 C) $2\sqrt{2} \text{ m}^2$
D) 4 m^2 E) Dipende dalla posizione dei due quadrati

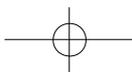
18. La somma $100^2 - 99^2 + 98^2 - \dots + 2^2 - 1^2$ è uguale a

- A) 2002; B) 2020; C) 4040; D) 5050; E) 8008

19. Sapendo che $a > 0$ e $\frac{?}{?}a ? \frac{1}{a} ? \frac{?^2}{?} ? 6$, quanto vale $a^3 ? \frac{1}{a^3} ?$

- A) $4\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 6 D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{6}$





20. Tracciamo dapprima un triangolo equilatero, poi tracciamo la circonferenza ad esso circoscritta; ora circoscriviamo a questa circonferenza un quadrato, e al quadrato circoscriviamo un'altra circonferenza; a questa nuova circonferenza circoscriviamo un pentagono regolare, e così via. Ripetiamo questa costruzione, con nuove circonferenze e nuovi poligoni regolari (ognuno avente un lato in più del precedente) fino a tracciare il poligono regolare di 16 lati. Quante sono le regioni disgiunte contenute all'interno dell'ultimo poligono?

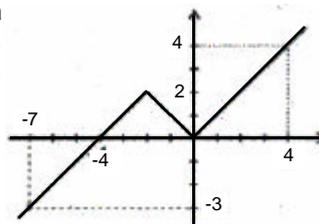


A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti

21. Il grafico della funzione f , illustrato dalla figura, è formato da un segmento e da due semirette. Qual è l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione $f(f(f(x)))=0$?

- A) $\{-4, 0\}$ B) $\{-8, -4, 0\}$
 C) $\{-12, -8, -4, 0\}$ D) Insieme vuoto
 E) $\{-16, -12, -8, -4, 0\}$



22. Un punto $P(x, r)$ appartiene alla circonferenza di centro $(2,2)$ e raggio r . Sapendo che $r > 2$ e sia x sia r sono interi positivi, qual è il più piccolo valore possibile per x ?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

23. Supponiamo che $A > B > 1$, e che B sia un intero positivo tale che A , B , $A-B$, $A+B$ siano tutti numeri primi. Allora $S=A+B+(A-B)+(A+B)$

- A) è pari B) è un multiplo di 3 C) è un multiplo di 5
 D) è un multiplo di 7 E) è un numero primo

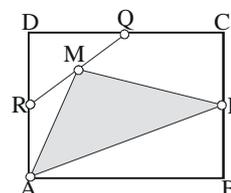
24. Il responsabile vendite di un grande magazzino deve stabilire il prezzo di un maglione. Un'indagine di mercato gli ha comunicato i seguenti dati: se il prezzo è 75 euro, il maglione sarà acquistato da 100 persone; ogni volta che il prezzo aumenta di 5 euro, il numero di acquirenti diminuisce di 20 unità, mentre ogni volta che il prezzo diminuisce di 5 euro, si vendono 20 maglioni in più. Il costo dei maglioni per il grande magazzino è di 30 euro l'uno. Qual è (in euro) il prezzo di vendita che massimizza il profitto?

- A) 80 B) 50 C) 75 D) 70 E) 65



25. In un rettangolo ABCD, siano P, Q e R i punti medi dei lati BC, CD e AD, rispettivamente, e sia M il punto medio del segmento QR. Quale frazione dell'area di ABCD è coperta dal triangolo APM?

- A) $1/4$ B) $1/6$ C) $3/8$
D) $1/3$ E) $5/16$



26. La successione (a_n) è definita nel modo seguente:

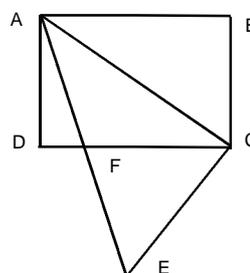
$$a_0 = 4 \quad a_1 = 6 \quad a_{n+1} = (a_n) / (a_{n-1}), \text{ con } n > 1.$$

Allora a_{2003} è uguale a:

- A) $3/2$ B) $2/3$ C) 4 D) $1/4$ E) $1/6$

27. ABCD è un rettangolo, in cui $AB = 16$, $BC = 12$. ACE è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in C e $CE = 15$. Se F è il punto di intersezione di AE e CD, allora l'area del triangolo ACF vale

- A) 75 B) 80 C) 96
D) 72 E) 48



28. Associandogli un verso, Pietro trasforma ogni spigolo di un cubo in un vettore di pari lunghezza; somma quindi tutti i 12 vettori così ottenuti. Quanti risultati differenti può ottenere Pietro in questo modo (operando sui versi tutte le scelte possibili)?

- A) 25 B) 27 C) 64 D) 100 E) 125

29. Consideriamo i 6 vertici di un esagono regolare, e tutti i segmenti che uniscono due qualsiasi di questi punti. Chiamiamo due tra questi segmenti "estranei" se non hanno punti in comune (compresi gli estremi). Quante sono le coppie di segmenti "estranei"?

- A) 26 B) 28 C) 30 D) 34 E) 36

30. Sia f un polinomio tale che $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Allora $f(x^2 - 1)$ è il polinomio

- A) $x^4 - 4x^2$ B) x^4 C) $x^4 + 4x^2 - 4$ D) $x^4 - 4$
E) nessuna delle risposte precedenti è corretta



1.

Poiché Marco è più vicino alla testa del treno di Lisa, il treno non può avere più di 11 carrozze (con 12 carrozze, la settima dalla testa coincide con la sesta dalla coda, con più di 12 la settima dalla testa precede la sesta dalla coda).

Dal momento che l'ultima carrozza è la quinta dopo la carrozza di Marco, e quest'ultima precede di due la carrozza di Lisa, la carrozza di coda è allora la terza dopo quella di Lisa, che è la settima carrozza del treno; in definitiva, il treno è composto da 10 carrozze.

2.

Chiaramente ognuna delle 4 porzioni di quadrato ombreggiate nella figura 1 ha area

$\frac{1}{4}$ (area quadrato - area cerchio) = $\frac{1}{4}$ (a-b), quindi l'area della figura 2 è

$3 \cdot (\text{area cerchio}) + 4 \cdot (\text{area porzione di quadrato}) = 3b + 4 \cdot \frac{1}{4} (a-b) = 2a + b$.

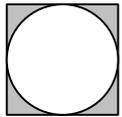


Fig. 1

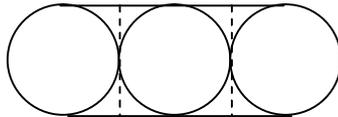


Fig. 2

3.

Il volume della sfera, dato dalla formula $\frac{4}{3} \pi r^3$, è lineare nella terza potenza del raggio, quindi, usando, invece del raggio, il diametro, che è il suo doppio, si ottiene il risultato, cioè il volume, moltiplicato per otto. Dunque il risultato va diviso per otto.

4.

$$2^{n+2003} + 2^{n+2003} = 2^{n+2003} (1+1) = 2^{n+2003} \cdot 2 = 2^{n+2004}$$

5.

Poiché la lunghezza di un lato deve essere minore della somma degli altri due, la risposta A è errata, in quanto

$$BC = 19\text{cm} > 11\text{cm} + 7\text{cm} = AB + CA.$$

Poiché la somma degli angoli deve essere 180° , la risposta D è errata, in quanto l'angolo $BAC + \text{l'angolo } CBA = 63^\circ + 128^\circ > 180^\circ$. Poiché l'angolo maggiore deve opporsi al lato più lungo, la risposta C è errata.

Anche la risposta B è errata poiché, essendo l'angolo $BAC = 63^\circ$, il lato BC dovrebbe essere più lungo dell'altezza di un triangolo equilatero di lato 11 cm, cioè più lungo di $11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} > 6 \text{ cm}$.

6.

La media degli studenti promossa nel quinquennio 1999-2003 è del 20% superiore a 325, quindi è 390. Ne segue che, nel periodo 1999-2002, sono stati promossi $325 \cdot 4 = 1300$ studenti e, nel periodo 1999-2003, ne sono stati promossi $390 \cdot 5 = 1950$. Quindi, nel 2003 sono stati promossi $1950 - 1300 = 650$ studenti.

7.

Dalla tabella si verifica che, nei 36 eventi equi-probabili che sono il risultato del lancio di due dadi, la differenza 0 capita 6 volte, la differenza 1 capita 10 volte, la differenza 2 capita 8 volte, la differenza 3 capita 6 volte, la differenza 4 capita 4 volte, la differenza 5 capita 2 volte; quindi la risposta giusta è C.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

8.

La curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, mentre la curva $y = x^2 + m$ è la parabola avente asse verticale, concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $P = (m, 0)$. Affinché esse abbiano un solo punto in

comune, P deve appartenere alla circonferenza, cioè $m=\pm 1$. Se $m=-1$, allora le curve hanno in comune, oltre al punto P, anche i punti $Q=(\pm 1,0)$. Quindi la sola possibilità è $m=1$, cioè la risposta esatta è E.

9.

Necessariamente 4 tessere debbono essere poste come indicato nella figura 1, quindi i modi distinti di ricoprire la scacchiera dipendono da come si ricoprono i quattro "angoli". Poiché ognuno di essi può essere ricoperto in due modi diversi, come indicato in figura 2, vi sono $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ modi differenti di ricoprire la scacchiera.

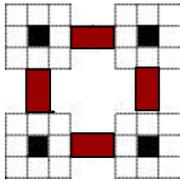


Figura 1

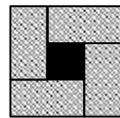
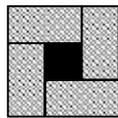
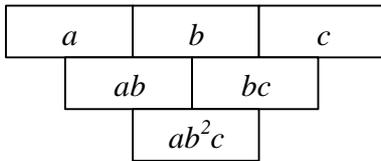


Figura 2

10.

Se nella prima riga vi sono tre numeri interi a, b, c , tutti maggiori di 1, nella seconda riga vi saranno ab e bc e nella terza riga (casella ombreggiata) vi sarà ab^2c , quindi il numero che compare nella casella ombreggiata deve avere almeno un fattore primo elevato al quadrato; poiché $154=2 \times 7 \times 11$ non ha alcun fattore quadratico, non può comparire nella casella ombreggiata.



11.

Poiché gli angoli evidenziati in figura sono retti, si ha che g è l'altezza del triangolo ABD relativa al lato AB, quindi $13g$ è il doppio dell'area di ABD. Similmente, $5e$ è il doppio dell'area di ACD e $12f$ il doppio dell'area di BCD. D'altro canto, $ABD+ACD+BCD=ABC$, quindi $5e+12f+13g=2 \times \text{area}(ABC)=12 \times 5=60$.

12.

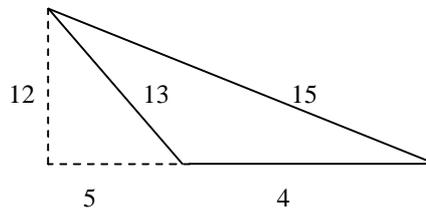
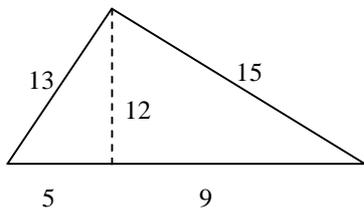
La probabilità è la stessa indipendentemente dall'ordine in cui i gabbiani raggiungono la riva, se ogni gabbiano al suo arrivo può posizionarsi in tutti i modi possibili rispetto a quelli già arrivati prima di lui. Supponiamo allora che uno dei gabbiani bianchi sia l'ultimo a volare: rispetto agli altri 9 già arrivati, esso all'arrivo può posizionarsi in 10 posti diversi, di cui solo due sono quelli adiacenti al gabbiano bianco arrivato prima di lui.

13.

$1+2003 \times 2005 = 1+(2004-1)(2004+1) = 1+2004^2 - 1 = 2004^2$, quindi iterando l'argomentazione su ognuna delle radici, si ottiene 2001.

14.

Poiché in un triangolo l'altezza relativa a un lato è sempre minore di ognuno degli altri due lati, la sola possibilità è che 12 sia l'altezza e 13 e 15 siano i lati. Dei due triangoli disegnati in figura bisogna scegliere quello di sinistra in quanto acutangolo. Dunque la sua area è 84.



15.

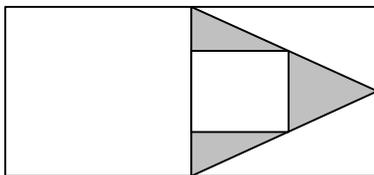
Poiché $5^{21} = (5^3)^7 = 125^7$ e $2^{49} = (2^7)^7 = 128^7$, chiaramente vi sono solo 2 termini della successione strettamente compresi tra di loro.

16.

Il polinomio $x^k + 1$, con k intero positivo, è divisibile per $x + 1$ se e solo se k è dispari. In tal caso il quoziente assume certamente valori interi quando x è intero. Allora $10^n + 1$ è divisibile per $101 = 10^2 + 1$ ogni volta che n è pari e $n/2$ è dispari. Il più grande numero di due cifre con questa proprietà è 98. D'altra parte, da $10^{99} + 1 = 10^{99} - 10^{98} + 10^{98} + 1 = 9 \cdot 10^{98} + 10^{98} + 1$ e dalla non divisibilità di $9 \cdot 10^{98}$ per 101 (101 è un numero primo), segue che 99 non è accettabile.

17.

Nelle nostre ipotesi, per motivi di similitudine, il triangolo ombreggiato a destra è chiaramente ottenibile accostando in modo opportuno i due rimanenti triangoli ombreggiati. Allora, accostando opportunamente i tre triangoli ombreggiati, si ottiene il quadrato di lato 1 m.



18.

$100^2 - 99^2 = (100+99)(100-99) = 100+99$, e similmente $98^2 - 97^2 = 98+97, \dots, 2^2 - 1^2 = 2+1$, quindi $100^2 - 99^2 + 98^2 - \dots + 2^2 - 1^2 = 100+99+98+\dots+2+1 = 100 \times 101 / 2 = 5050$.

19.

$$a^3 + 1/a^3 = (a + 1/a)^3 - 3(a + 1/a) = (\sqrt{6})^3 - 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}.$$

20.

Il triangolo individua una regione; tracciando la circonferenza ad esso circoscritta si individuano altre 3 regioni; con il quadrato altre 4 regioni; con la circonferenza circoscritta al quadrato altre 4 regioni; con il pentagono altre 5 regioni e così via. In totale si hanno $1+3+4+4+5+5+6+\dots+15+15+16=248$ regioni.

21.

Dal grafico si evince che $f(x)=0$ se e solo se $x=0$ oppure $x=-4$; quindi $f(f(x))=0$ se e solo se $f(x)=0$ oppure $f(x)=-4$; ma $f(x)=-4$ se e solo se $x=-8$; in definitiva $f(f(x))=0$ e solo se $x=0$ oppure -4 oppure -8 . Ripetendo l'argomentazione, $f(f(f(x)))=0$ se e solo se $f(x)=0$ oppure -4 oppure -8 , ma questo avviene se e solo se $x=0$ oppure -4 oppure -8 oppure -12 ; dunque la risposta esatta è C.

22.

$P(x,r)$, appartenendo alla circonferenza di centro $(2,2)$ e raggio r , soddisfa l'equazione $(x-2)^2+(r-2)^2=r$, quindi $(x-2)^2=4(r-1)$; ne consegue che $r-1$ è in quadrato perfetto, e se vogliamo per x il più piccolo valore possibile, anche r deve essere il più piccolo intero possibile maggiore di e tale che $r-2$ sia un quadrato perfetto; queste condizioni sono verificate da $r=5$, da cui segue $x=6$.

23.

I numeri $A-B$ e $A+B$ hanno la stessa parità, cioè sono entrambi pari o entrambi dispari; poiché sono entrambi primi, devono essere dispari, quindi A e B non possono essere entrambi dispari; dovendo essere primi, uno di loro deve essere 2; poiché anche $A-B$ e $A+B$ sono primi, deve essere $B=2$. I tre interi $A-2$, A e $A+2$ danno resti distinti quando divisi per 3, dunque uno di loro dà resto zero, cioè è divisibile per 3; essendo inoltre primo, deve essere 3; questo numero non può essere altri che il minimo dei tre, dunque $A=5$. In definitiva $S=A+B+(A-B)+(A+B)=5+2+3+7=17$, e la risposta esatta è E.

24.

Quando il prezzo del maglione è fissato in $75+5m$ euro, saranno venduti $100-20m$ maglioni, con un profitto unitario di $75+5m-30=45+5m$, quindi un profitto totale di un ricavo di $(45+5m)(100-20m)$. Per massimizzare il profitto, bisogna determinare un m che massimizza la funzione $(45+5m)(100-20m)$; questa funzione rappresenta una parabola con la concavità verso il basso e massimo dato dal vertice $V(-2, 5720)$. In definitiva, $m=-2$, quindi il prezzo che massimizza il profitto è 65 euro.

25.

Il triangolo APR ha area uguale a $\frac{1}{4}$ dell'area di $ABCD$, mentre il triangolo APQ ha area uguale a $\frac{3}{8}$ dell'area di $ABCD$. Poiché M è il punto medio di QR , l'area di APM sarà la media aritmetica delle alla media delle aree di APQ e APR , cioè $(\frac{1}{4}+\frac{3}{8})/2=\frac{5}{16}$ dell'area di $ABCD$.

26.

In base alla definizione si ha $a_0=4$, $a_1=6$, $a_2=3/2$, $a_3=1/4$, $a_4=1/6$, $a_5=2/3$, $a_6=4$, $a_7=6$, e quindi i termini si ripetono ciclicamente a partire da a_6 , cioè a_n è uguale a a_r , dove r è il resto di n diviso per 6. In particolare, poiché 2003 diviso 6 dà resto 5,

$$a_{2003} = a_5 = 2/3.$$

27.

Mediante il teorema di Pitagora si calcolano le lunghezze $AC=20$ e $AE=25$, quindi i triangoli ABC e ACE sono simili; in particolare si ha l'uguaglianza di angoli $BAC = CAE = ACD$, dunque il triangolo ACF è isoscele. Sia M il punto medio del segmento AC : allora i triangoli uguali AFM e CFM sono entrambi rettangoli in M e simili a ABC , con i lati proporzionali $AM=10$ e $AB=16$. Dunque $\text{area}(ACF) = 2 \times \text{area}(AFM) = 2 \times (10/16)^2 \times \text{area}(ABC) = (10/16)^2 \times 16 \times 12 = 75$.

28.

La somma di vettori gode della proprietà commutativa.

Consideriamo i quattro vettori corrispondenti a quattro spigoli paralleli del cubo: questi vettori hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, ma per ognuno di essi vi sono due possibili versi; operando tutte le scelte possibili, si ottengono, dalla somma di questi 4 vettori, 5 possibili risultati: i vettori aventi lunghezza (orientata) $-4l, -2l, 0, 2l, 4l$ (se l è la lunghezza dello spigolo). Ragionando allo stesso modo per i tre gruppi ognuno composto dai 4 spigoli paralleli del cubo, si ottengono $5 \times 5 \times 5 = 125$ risultati differenti.

29.

Una coppia di segmenti estranei individua esattamente 2 vertici dell'esagono, i vertici che non appartengono a nessuno dei due segmenti; inoltre, per ogni coppia di vertici così individuati, vi sono esattamente due coppie di segmenti estranei che non contengono questi vertici; in definitiva, in numero di coppie di segmenti estranei è il doppio del numero delle coppie (non ordinate) di vertici dell'esagono, cioè $2 \times (6 \times 5/2) = 30$.

30.

Poiché f è un polinomio e $f(x^2+1) = x^4 + 4x^2$, f deve necessariamente essere di grado 2 e avere coefficiente direttivo 1, cioè f deve essere del tipo $f(x) = x^2 + ax + b$, quindi, mediante facili calcoli, si ottiene $x^4 + 4x^2 = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + a(x^2+1) + b = x^4 + (2+a)x^2 + (1+a+b)$, da cui segue che $a+2=4$ e $a+b+1=0$, cioè $a=2$ e $b=-3$, quindi $f(x^2-1) = (x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 3 = x^4 - 4$.