Kangourou della Matematica 2003
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2003

LIVELLO STUDENT (tempo concesso 2 ore e 30')

S1. *(5 punti)* Ad una festa partecipano 53 persone. È possibile che ciascuna di esse stringa la mano ad esattamente 11 altri invitati? Giustificare la risposta.

S2. *(7 punti)* Partendo da 1, quanti numeri dispari consecutivi si devono sommare per ottenere 1.600?

S3. *(11 punti)* Determina la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo T conoscendo:
- il raggio r della circonferenza inscritta in T;
- il raggio R della circonferenza esterna a T, alla quale sono tangenti l'ipotenusa di T e i prolungamenti dei due cateti di T.

S4. *(14 punti)* Un piccolo album ospita 4 figurine che vengono vendute singolarmente. Acquistandone cinque a caso, qual è la probabilità (espressa da un numero fra 0 e 1) di completare l'album?

S5. *(18 punti)* Il quadrante di un orologio riporta solo i 12 numeri corrispondenti alle ore; le sue tre lancette (ore, minuti primi, minuti secondi) si muovono di moto continuo. In questo istante (siamo di mattina) la lancetta dei secondi indica esattamente uno dei 12 numeri e fra meno di mezzo secondo la lancetta delle ore e quella dei minuti primi si sovrapporranno esattamente. Che ore sono?

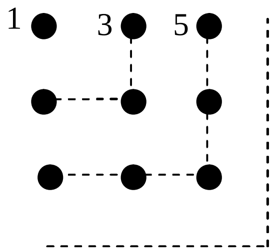
S6. *(22 punti)* Una commissione esaminatrice è composta da 7 membri. I testi delle prove sono custoditi in una cassaforte che si può chiudere con lucchetti a due a due diversi fa loro. Quanti lucchetti si devono usare e quante chiavi si devono consegnare in totale ad ogni commissario, se si vuole che ogni gruppo di 4 commissari sia in grado di aprire la cassaforte, ma non lo sia alcun gruppo di 3?

Soluzione dei quesiti proposti alla finale di Mirabilandia 2003

Livello Student

S1: No. Infatti, se lo fosse, il numero totale di strette di mano dovrebbe essere 53 ? 11 : 2 che non è un numero intero.

S2: 40. Infatti, o con calcolo diretto o con l'aiuto di metodi grafici (v. figura), per ogni n intero positivo si ottiene $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

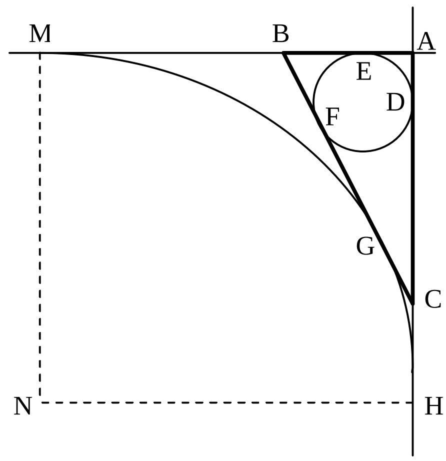


S3: $R - r$ Si osservi la figura, dove: AE = AD = r; EB = BF = a; BM = BG = c; MN = NH = R; CD = CF = b; CG = CH = d.
La lunghezza dell'ipotenusa di T è $c + d = a + b$.

Da $a + b = (R - c - r) + (R - d - r) =$

$2(R - r) - (c + d) = 2(R - r) - (a + b)$

si ricava $a + b = R - r$.



S4: 15/64. Riusciamo a completare l'album se e solo se una sola figurina è ripetuta e compare esattamente due volte. I diversi allineamenti possibili di 5 figurine sono in numero di $4^5 = 1024$. Contiamo gli allineamenti favorevoli: quelli in cui la seconda delle figurine uguali è al quinto posto sono 4 ? 24, quelli in cui è al quarto sono 3 ? 24 e così via. In totale gli allineamenti favorevoli sono (1 + 2 + 3 + 4) ? 24 = 240.

S5: 9 h 49' 5" . La lancetta dei minuti e quella dei secondi si possono sovrapporre in 11 posizioni diverse, chiaramente equidistanti e quindi assunte ognuna a distanza di 1h 5' 27" 3/11 dalla precedente. Dobbiamo individuare quelle (eventuali: è chiaro, da come è formulato il problema, che ve ne sarà una e una sola) che superano di meno di mezzo secondo qualche numero segnato sul quadrante, cioè qualche multiplo intero di 5 secondi. Facilmente si ottiene la sola posizione corrispondente a 9h 49'5"5/11.

S6: 35 lucchetti e 20 chiavi. Deve esserci un lucchetto per ogni terna possibile di commissari: dunque 35 lucchetti. Per ogni lucchetto si fanno 4 chiavi e si distribuiscono le 35×4 chiavi dandone 20 ad ogni commissario. Per fare in modo che nessun commissario abbia due chiavi uguali e che ogni gruppo di 4 commissari possieda almeno una chiave di ogni lucchetto, ma ciò non sia vero per nessun gruppo di 3, basta utilizzare lo schema sottostante, nel quale nelle colonne dalla seconda alla quinta sono segnalate le possibili combinazioni di 7 numeri (nomi dei commissari) a 4 a 4. Si vede che ogni colonna contiene i nomi di 4 commissari diversi: quindi con meno di 4 commissari non si possono aprire tutti i lucchetti.

No chiave	I set chiavi	II set chiavi	III set chiavi	IV set chiavi
1	1	2	3	4
2	1	2	3	5
3	1	2	3	6
4	1	2	3	7
5	1	2	4	5
6	1	2	4	6
7	1	2	4	7
8	1	2	5	6
9	1	2	5	7
10	1	2	6	7
11	1	3	4	5
12	1	3	4	6
13	1	3	4	7
14	1	3	5	6
15	1	3	5	7
16	1	3	6	7
17	1	4	5	6
18	1	4	5	7
19	1	4	6	7
20	1	5	6	7
21	2	3	4	5
22	2	3	4	6
23	2	3	4	7
24	2	3	5	6
25	2	3	5	7
26	2	3	6	7
27	2	4	5	6
28	2	4	5	7
29	2	4	6	7
30	2	5	6	7
31	3	4	5	6
32	3	4	5	7
33	3	4	6	7
34	3	5	6	7
35	4	5	6	7