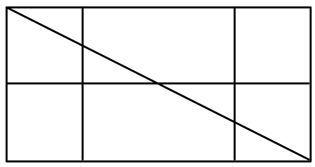
Kangourou Italia
Gara del 21 marzo 2002
Categoria Student
Per studenti di quarta e quinta superiore

Regole:

- ***La prova è individuale. Ogni tipo di calcolatrice è vietato***
- ***Vi è una sola risposta esatta per ogni domanda. Le risposte esatte fanno acquisire 3, 4 o 5 punti secondo la loro difficoltà (3 punti per le prime 10 domande, 4 punti per le domande da 11 a 20, 5 punti per le ultime 10). Ogni risposta errata costa un quarto del suo valore in punti. Se non viene data alcuna risposta, il punteggio per quella domanda è 0.***
- ***Durata della prova un'ora e quindici minuti. Inserite le vostre risposte nelle corrispondenti caselle.***

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti

1. Quanti triangoli si possono individuare nella figura?



A. *2* **B.** *4* **C.** *6* **D.** *8* **E.** *10*

2. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $n!$ il prodotto di tutti gli interi positivi minori o uguali a n, ciascuno preso una sola volta (per esempio si ha $4! = 24$). Determinate l'ultima cifra (della rappresentazione decimale) del numero $1! + 2! + 3! + \ldots + 2002!$

A. *0* **B.** *1* **C.** *2* **D.** *3* **E.** *5*

3. Quanti sono i numeri interi positivi la cui rappresentazione decimale è costituita da tre cifre significative due almeno delle quali siano uguali?

A. *180* **B.** *252* **C.** *256* **D.** *280* **E.** *312*

4. Siano a e b due interi positivi il cui Massimo Comune Divisore è 3. Sapendo che il quoziente a / b vale 4 / 10, quanto vale il prodotto $a \cdot b$?

A. *18* **B.** *10* **C.** *36* **D.** *30* **E.** *90*

5. Un prisma ha 2002 vertici. Qual è il numero dei suoi spigoli?

   A. *3003* ***B.*** *1001* ***C.*** *2002* ***D.*** *4002* ***E.*** *2001*

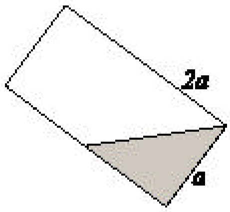
6. Quando viene congelata, l'acqua aumenta di 1 / 11 il proprio volume. Di quanto diminuisce il volume del ghiaccio quando, fondendo, ritorna acqua?

   A. *1 / 11* ***B.*** *1 / 10* ***C.*** *1 / 12* ***D.*** *1 / 13* ***E.*** *1 / 14*

7. Lo sfruttamento medio della capacità ricettiva di un albergo è 88 % durante i tre mesi estivi e 44 % durante i rimanenti mesi dell'anno. Qual è lo sfruttamento medio relativo all'intero anno?

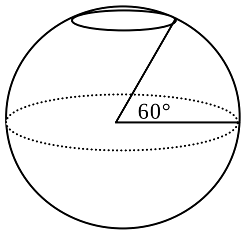
   A. *80 %* ***B.*** *50 %* ***C.*** *55 %* ***D.*** *46 %* ***E.*** *48 %*

8. Un bicchiere cilindrico di base *a* parzialmente pieno di acqua e inclinato di 45° si presenta come mostrato in figura. Quale percentuale del bicchiere contiene acqua?



   A. *meno del 25%* ***B.*** *25%* ***C.*** *33%* ***D.*** *33,333%*
   E. *più del 34%*

9. La lunghezza dell'equatore è di circa 40 000 km. La lunghezza del parallelo che si trovi a 60° di latitudine Nord (si veda la figura a lato), arrotondata alle centinaia di km è



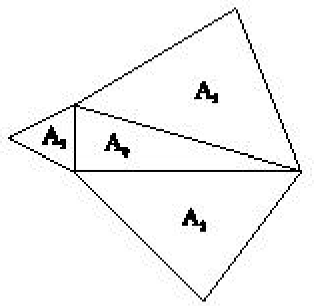
   A. *34 600 km* ***B.*** *23 500 km* ***C.*** *26 700 km* ***D.*** *30 000 km*
   E. *nessuno dei precedenti*

10. L'alfabeto del popolo marziano dei Berals è formato dalle sei lettere A, B, E, L, R, S prese in questo ordine. Le parole del loro linguaggio sono esattamente le sequenze, ordinate alfabeticamente, di queste sei lettere, dove ogni lettera viene utilizzata una e una sola volta. Qual è la parola che si trova alla 537-sima posizione del loro dizionario?

    A. *REBLAS* ***B.*** *SBERLA* ***C.*** *LERBAS* ***D.*** *RABLES*
    E. *ARBELS*

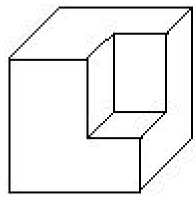
I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti

11. La figura a lato mostra 4 triangoli aventi aree A_i (i = 0, 1, 2, 3). L triangolo di area A_0 è rettangolo, gli altri tre sono equilateri. Allora necessariamente:



A. $A_1 + A_2 = A_3$ **B.** $(A_1)^2 + (A_2)^2 = (A_3)^2$
C. $A_1 + A_2 + A_3 = 3\,A_0$ **D.** $A_1 + A_2 = A_3$Ö 2
E. *nessuna delle risposte precedenti è corretta*

12. La scultura astratta che si vede nella figura a fianco è stata ottenuta asportando un parallelepipedo rettangolo da un solido che originariamente era un cubo. Il volume del cubo originale era di 512 dm^3. Qual è l'area della superficie totale della scultura?



A. *320* dm^2 **B.** *336* dm^2 **C.** *384* dm^2 **D.** *468* dm^2
E. *nulla si può dire senza ulteriori informazioni*

13. Ad una gara di pesca sono presenti Pietro con suo figlio e Giovanni con suo figlio. Pietro ha preso tanti pesci quanti ne ha preso suo figlio. Giovanni invece ha pescato il triplo del numero dei pesci di suo figlio. Insieme hanno pescato 35 pesci. Il figlio di Pietro si chiama Luca. Come si chiama il figlio di Giovanni?

A. *le informazioni fornite sono contraddittorie* **B.** *Giovanni* **C.** *Pietro*
D. *Luca* **E.** *non vi sono sufficienti informazioni per rispondere*

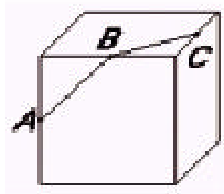
14. Dieci squadre partecipano ad un torneo di calcio (ogni squadra gioca contro tutte le altre una e una sola volta). Al termine di ogni partita alla squadra vincente vanno 3 punti e alla perdente 0, in caso di pareggio si assegna 1 punto ad entrambe le squadre. Sommando i punti totalizzati dalle dieci squadre si ottiene 130. Quanti incontri sono terminati in pareggio?

A. *1* **B.** *2* **C.** *3* **D.** *4* **E.** *5*

15. Apportando una modifica ad un impianto, in un processo industriale, è possibile ridurre le spese di produzione del 50 %; una diversa modifica le può ridurre del 40 %, mentre una terza modifica consente una riduzione del 10 %. Di quale percentuale sarebbero ridotte le spese di produzione se introducessimo simultaneamente le 3 modifiche che sono fra loro indipendenti?

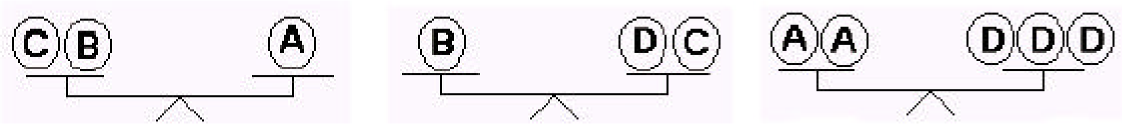
A. *100 %* **B.** *73 %* **C.** *92 %* **D.** *87 %* **E.** *67 %*

16. Quanto misura l'angolo formato dai segmenti AB e BC, sapendo che A, B e C sono i punti medi degli spigoli del cubo?



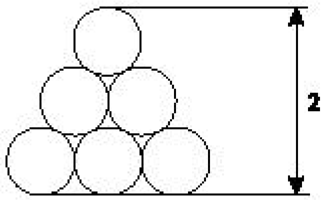
A. *90°* ***B.*** *100°* ***C.*** *110°* ***D.*** *120°* ***E.*** *135°*

17. Alcuni oggetti di quattro tipi, A, B, C, D, disposti su tre bilance come in figura, le fanno stare in equilibrio. Quanti oggetti del tipo C bilanciano un oggetto del tipo B ?



A. *2* ***B.*** *3* ***C.*** *5* ***D.*** *6* ***E.*** *7*

18. Il "triangolo" nella figura a lato è formato da cerchi dello stesso raggio *r*. L'altezza del "triangolo" è 2. Quanto misura il raggio *r* ?



A. *1 / (1 + Ö 3)* ***B.*** *2 / (1 + Ö 3)* ***C.*** *2 / (2 + Ö 3)* ***D.*** *1 / (2 + Ö 3)* ***E.*** *altra risposta*

19. Achille piè veloce insegue la tartaruga che cammina lentamente davanti a lui. La distanza iniziale tra loro è di 990 metri. La velocità di Achille è di 10 metri al secondo, la velocità della tartaruga è di 1 metro ogni 10 secondi. Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga?

A. *1 minuto e 40 secondi* ***B.*** *990 secondi* ***C.*** *mai* ***D.*** *1 minuto e 50 secondi* ***E.*** *1 minuto e 39 secondi*

20. In una sequenza di numeri razionali positivi, ogni termine esclusi i primi due è la somma di tutti quelli che lo precedono. L'undicesimo termine della successione è 1000 ed il primo è 1. Qual è il secondo termine?

A. *2* ***B.*** *93 / 32* ***C.*** *250 / 64* ***D.*** *109 / 16* ***E.*** *nessuno di questi*

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti

21. Sono dati esattamente dieci punti nel piano. Cinque di questi stanno su una retta e nessuna altra retta contiene più di due punti tra quelli dati. Quanti sono i triangoli non degeneri aventi come vertici tre dei dieci punti dati?

A. *20* **B.** *50* **C.** *70* **D.** *100* **E.** *110*

22. Considerate il numero $2002! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2002$. Chiaramente 2001 divide 2002! poiché $2002! = 2000! \cdot 2001 \cdot 2002$. Il massimo valore k tale che 2001^k divida 2002! è uguale a

A. *101* **B.** *71* **C.** *69* **D.** *2* **E.** *1*

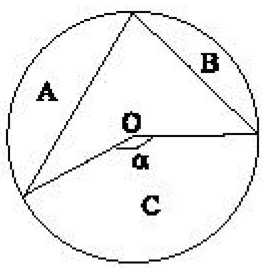
23. Due gruppi di amici formano una comitiva di più di 27 persone per gite in montagna. Alla prima gita hanno partecipato tutti tranne 12 persone del secondo gruppo, e in questa gita le persone del primo gruppo sono state più del doppio di quelle del secondo gruppo. Alla seconda gita hanno partecipato tutti tranne 10 persone del primo gruppo, e in questa gita le persone del secondo gruppo sono state più di 9 volte quelle del primo gruppo. Quante persone vi sono in ognuno dei due gruppi?

A. *12 e 18* **B.** *11 e 17* **C.** *10 e 20* **D.** *13 e 15*
E. *non è possibile rispondere senza ulteriori informazioni*

24. Quanti triangoli non congruenti hanno come vertici tre dei vertici di un decagono regolare?

A. *6* **B.** *7* **C.** *8* **D.** *9* **E.** *nessuna delle risposte precedenti è corretta*

25. La circonferenza della figura a lato ha il centro nel punto O e il raggio unitario. La misura in radianti di ognuno degli angoli α, β e γ è minore di π. Se l'area della regione A vale $\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{4}$ e l'area della regione B vale $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, allora l'area della regione C vale:



A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $\frac{\pi}{6}$ **E.** $\frac{5\pi}{12}$

26. Quanti numeri interi compresi tra 1 e 10^{2002} hanno la somma delle cifre uguale a 2?

__A.__ 2007006 *__B.__ 2005003* *__C.__ 2003001* *__D.__ 2005002*
__E.__ nessuno delle precedenti risposte è corretta

27. Un aereo ideale vola da Milano nella direzione di Mosca. Esso parte con una velocità di 1 metro al secondo, ma raddoppia la sua velocità ad ogni metro percorso. Dopo quanto tempo dalla partenza sarà sulla verticale di Mosca (Mosca dista da Milano circa 2800 chilometri) ?

__A.__ mai *__B.__ più di 2 anni* *__C.__ tra due mesi e tre mesi* *__D.__ tra 3 e 4 ore*
__E.__ meno di 2 secondi

28. In un contenitore vi sono 21 litri di una soluzione con il 18 % di alcool. Quanti litri di questo liquido si devono sostituire con una soluzione al 90 % di alcool per ottenere una soluzione al 42 % di alcool?

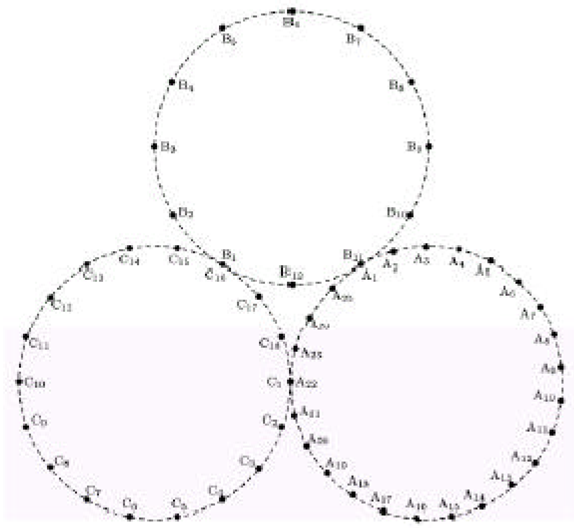
__A.__ 3 *__B.__ 5* *__C.__ 7* *__D.__ 9* *__E.__ 11*

29. a, b, c sono tre numeri tali che $a + b + c = 7$ e $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$.

Quanto vale $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=?$

__A.__ 19 / 10 *__B.__ 17 / 10* *__C.__ 9 / 7* *__D.__ 3 / 2* *__E.__ 10 / 7*

30. L'immagine a fianco rappresenta un gioco da tavolo in cui le caselle sulle tre circonferenze sono state numerate da A_1 a A_{25}, da B_1 a B_{12} e da C_1 a C_{18}. Una fiche è posta inizialmente nella casella A_1 e può venire spostata in altre caselle secondo la regola seguente: ad ogni passo la fiche può essere spostata in una casella distante due posizioni, sulla stessa circonferenza, in qualsiasi direzione (per esempio una sequenza ammissibile è la seguente: $C_5 \to C_3 \to C_1 = A_{22} \to A_{20} \to A_{18} \to A_{20}$); ma non è possibile muovere direttamente la fiche da C_2 a A_{23}. Quante sono le caselle inaccessibili per qualsiasi sequenza di mosse, partendo, come si è detto, dalla casella A_1 ?

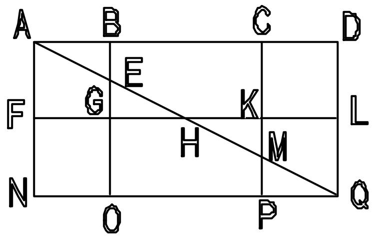


__A.__ 0 *__B.__ 6* *__C.__ 15* *__D.__ 27* *__E.__ 30*

Kangourou Italia
Gara del 21 marzo 2002
Categoria Student
Per studenti di quarta e quinta superiore
Soluzioni

La risposta corretta è segnalata tra parentesi quadre dopo il numero di quesito.

1. [E] I dieci triangoli sono: ABE, ACM, APQ, HKM, HLQ, AFH, ANQ, EGH, EOQ, MPQ.



2. [D] Per ogni intero $n>4$, $n!$ è divisibile per 10, quindi la sua ultima cifra è zero; ne segue che l'ultima cifra di 1!+2!+ 3!+…+2002! coincide con l'ultima cifra di 1!+2!+ 3!+4!=1+2+6+24=33.

3. [B] Gli interi positivi di tre cifre significative sono 900: infatti per la prima cifra vi sono 9 possibili scelte (lo zero non può essere prima cifra) per ognuna delle altre due cifre vi sono 10 scelte possibili; tra di questi quelli aventi tutte le cifre distinte sono 9*9*8=648: infatti per la prima cifra vi sono 9 possibile scelte, 9 per la seconda (non si può usare quella già scelta come prima cifra) e similmente 8 possibili scelte per la terza cifra. In definitiva vi sono 900-648=252 numeri aventi almeno 2 cifre uguali.

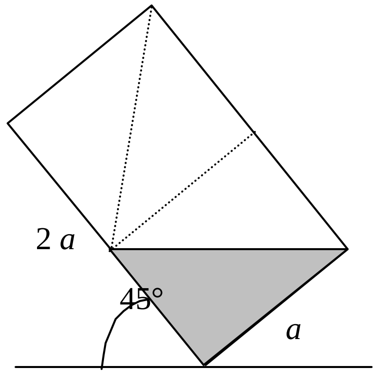
4. [E] a/b=4/10=2/5, inoltre MCD(a, b)=3, quindi a=3*2=6 e b=3*5=15, da cui ab=6*15=90.

5. [A] Un prisma con 2002 vertici ha le due facce di base aventi ognuna 1001 vertici. Gli spigoli del prisma sono quindi i lati delle due basi e i segmenti congiungenti i vertici corrispondenti delle basi, cioè 1001+1001+1001=3003.

6. [C] Sia A il volume dell'acqua e G quello del ghiaccio, allora G=A(1+1/11), da cui segue A=G(1-11/12).

7. [C] La frazione dei posti letto occupati nell'albergo è 88/100 per un quarto dell'anno e 44/100 per i rimanenti tre quarti, quindi la frazione totale, nel corso dell'intero anno e'(88/100)*(1/4)+(44/100)*(3/4)=55/100.

8. [B] E' immediato dalla figura accanto.



9. [E] Il raggio del parallele di latitudine á è R cos á , dove R è il raggio terrestre, cioè il raggio della circonferenza equatoriale; ne segue che il parallelo ha lunghezza E cos á , dove E è la lunghezza dell'equatore; nel caso in esame la lunghezza del parallelo è 40000*cos60 km = 20000 km.

10. [A] Le parole del linguaggio sono esattamene 6!=720. Di queste, quelle che cominciano per A sono 5! = 120, e occupano i primi 120 posti, quelle che cominciano per B sono dal posto 121 al posto 240 e così via; in particolare, quelle che cominciano per R sono dal posto 481 al posto 600. Tra di esse, quelle che hanno come seconda lettera A sono 4! =24, e occupano i posti da 481 a 504, quelle che hanno B i posti da 505 a 528, quelle che hanno E i posti da 529 a 552. La risposta [A] è la sola tra quelle proposte che comincia per RE, quindi è l'unica che cade in questo intervallo, e dunque deve necessariamente essere la parola cercata, che è alla 537-maq posizione, come si può anche vedere direttamente continuando con lo stesso tipo di argomentazione.

11. [A] In un triangolo equilatero l'area è proporzionale al quadrato del lato, $A = kl^2$. Nel caso in esame, $A_1+A_2 = k\ [\ (cateto)^2+(cateto)^2] = k\ (ipotenusa)^2 = A_3$, in quanto il triangolo è rettangolo.

12. [C] Asportando un qualsiasi parallelepipedo rettangolo come indicato, l'area della superficie totale rimane immutata, quindi uguale a quella originaria. Il cubo ha lato 8 dm, quindi la sua area totale è $6*8^2\ dm^2 = 384\ dm^2$.

13. [C] .

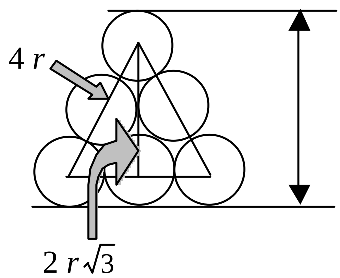
14. [E] Il numero totale di partite giocate è 10*9/2=45. Se una partita termina in pareggio, il numero totale di punti assegnati alle due squadre per quella partita è 2, altrimenti è 3. Sia p il numero di partite finite in pareggio, allora i punti assegnati in totale sono 2*p+3*(45-p)=130, da cui segue p=5..

15. [B] Sia C il costo iniziale del processo industriale, introducendo le tre modifiche simultaneamente il nuovo costo sarà C(1-50/100)(1-40/100)(1-10/100)=C(27/100)=C(1-73/100), cioè il risparmio è 73%.

16. [D] La sezione del cubo con il piano che passa per i punti A, B e C indicati è un esagono regolare, quindi l'angolo ABC coincide con l'angolo dell'esagono regolare e misura 120º.

17. [C] Le tre bilance in equilibrio si traducono nelle equazioni A=B+C, B=C+D, 2A=3D. Considerando queste tre equazioni come un sistema lineare nelle 3 incognita A, B e D, con C parametro, si ottiene A-B=C, B-D=C, 2A-3D=0, che ha come soluzione A=6C, B=5C, D=4C.

18. [A] Il triangolo equilatero avente vertici nei centri delle circonferenze (vedi figura) ha lato 4r e altezza $2r\sqrt{3}$, quindi si ha l'uguaglianza $2r\sqrt{3}+2r=2$, da cui segue che $r=1/(1+2r\sqrt{3})$.



19. [A] In 100 secondi la tartaruga percorrerà 10 metri e quindi sarà a 1000 metri dalla posizione iniziale di Achille. Negli stessi 100 secondi Achille percorrerà 1000 metri e dunque raggiungerà la tartaruga.

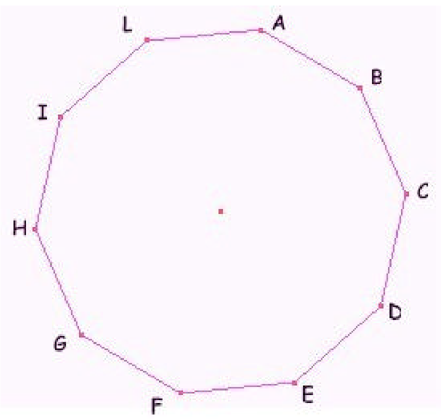
20. [B] Siano a e b i primi due termini della successione; poiché ogni altro termine è ogni altro termine è somma di tutti i precedenti, il terzo termine è a+b, il quarto 2(a+b), il quinto 2^2(a+b) e così via; in particolare l'undicesimo termine è 2^8(a+b); poiché a=1, si ha l'uguaglianza 256(1+b)=1000, da cui segue b=93/32

21. [E] Sia *r* la retta che contiene i cinque punti, i triangoli possono avere su *r* due, uno o nessun vertice. I triangoli aventi due vertici su *r* sono determinata dalla scelta di un punto frai cinque di *r* e due tra i cinque punti non su *r*, quindi sono 5c(5×4/2)=50; similmente, i triangoli aventi due vertici su *r* sono determinati dalla scelta di due punti tra i cinque di *r* e un altro punti tra i cinque al di fuori di *r*, quindi sono di nuovo 50; infine, i triangoli non aventi alcun vertice su *r* sono dati dalla scelta di tre punti tra i cinque non appartenenti a *r*, sono quindi (5×4×3)/(3×2×1)=10. Il numero totale di triangoli del tipo richiesto è quindi 50+50+10=110.

22. [B] La fattorizzazione prima di 2001 è 2001=3·23·29, quindi la potenza massima di 2001 che divide 2002! coincide con il numero totale dei fattori 29 contenuti in tutti gli interi 1, 2, 3,…, 2002. Vi è un fattore 29 ogni 29 numeri, quindi vi sono [2002/29]=69 interi positivi minori di 2002 divisibili per 29; tra di questi ve ne sono [2002/29^2]=2 divisibili per 29^2; infine nessuno è divisibile per 29^3, in quanto 29^3>2002. Dunque il numero di fattori 29 contenuti in 2002! è 69+2=71, che è anche la massima potenza di 2001 che divide 2002!.

23. [B] Siano a e b il numero dei componenti del primo e secondo gruppo rispettivamente, le condizioni descritte nel quesito si traducono nelle disuguaglianze: a+b>27, a>2(b-12), b>9(a-10). Sostituendo la seconda nella terza si ottiene b>9a-90>9(2b-24)-90=18b-306, cioè 17b<306, quindi b<306/17=18; similmente, sostituendo la terza disuguaglianza nella seconda si ottiene a>2b-24>2(9a-90)-24=18a-204, da cui 17a<204 e a<204/17=12. La sola coppia di interi a e b tali che a<12, b<18 e a+b>27 è a=11, b+17, e questi valori di a e b soddisfano le tre disuguaglianze di partenza. **La domanda è stata annullata a causa di un refuso tipografico. La risposta [B] recava 11 e 7 anziché 11 e 17.**

24. [C] Se indichiamo i dieci vertici del decagono regolare con le lettere da A a L come indicato in figura, si hanno otto triangoli non congruenti, aventi tre di questi dieci punti come vertici, dati da (A,B,C), (A,B,D), (A,B,E), (A,B,F), (A,C,E), (A,C,F), (A,C,G), (A,D,G). Nota: *con (A,B,C) si denota il triangolo avente vertici nei punti A,B,C.*



25. [B] L’area della regione A indicata in figura, espressa in termini dell’angolo ã, vale ã/2-(1/2)cosã , quindi 5ð/12-1/4=ã/2-(1/2)cosã, da cui segue ã= 5ð/6; similmente, ragionando a partire dalla regione B, ð/4-1/2=â/2-(1/2)cosâ, quindi â=ð/2; il risultato finale è quindi á=2ð-ð/2-5ð/6= ð/3.

26. [B] Tutti i numeri di tipo richiesto hanno al più 2002 cifre significative (infatti 10^{2002} è il solo numero, tra quelli compresi tra 1 e 10^{2002} , ma la somma delle sue cifre è 1, e non 2 come richiesto).Affinchè la somma delle cifre del numero sia 2, si danno due sole possibilità: (a) il numero contiene due cifre uguali a 1 e tutte le restanti cifre sono 0; (b) il numero ha come prima cifra 2 e le restanti cifre sono tutte). Nel caso (a) vi sono 2002*2001/2=2003001 numeri, nel caso (b) vi sono 2002 numeri, il totale è quindi 2005003.

27. [E] L’aereo percorre il primo metro nel primo secondo e, raddoppiando la velocità, vola a 2 m/s dopo un secondo; quindi percorre il secondo metro in ½s e raddoppia di nuovo la velocità, volando a 4 m/s; successivamente percorre il terzo metro in ¼ s e raddoppia la sua velocità, portandosi a 8 m/s, e così via. Quindi l’aereo percorrerà N metri, con N qualsiasi, in $1+1/2+1/4+1/8+\ldots+1/2^{N-1}$ secondi, e dunque in meno di 2 s, in quanto la somma della serie geometrica 1+1/2+1/4+1/8+…=2

28. [C] Siano *l* i litri da aggiungere per ottenere la soluzione richiesta, *l* deve soddisfare l’equazione: (21-*l*)*18/100+*l**90/100=21*42/100, da cui segue *l*=7.

29. [A] Dalle identità (a+b+c)/(a+b)=1+c/(a+b), (a+b+c)/(c+a)=1+b/(c+a), (a+b+c)/(b+c)=1+a/(b+c) segue che (a+b+c)(1/(a+b)+1/(b+c)+1/(c+a))=3+ c/(a+b)+ b/(c+a)+ a/(b+c), quindi c/(a+b)+ b/(c+a)+ a/(b+c)=7*7/10-3=19/10.

30. [B] Notiamo in primo luogo che ogni casella della circonferenza A è raggiungibile, in quanto A contiene un numero dispari di caselle, e dunque la sequenza di mosse A_1-> A_3-> A_5->… A_{25}-> A_2-> A_4->… A_{22}-> A_{24} raggiunge tutte le caselle di A. Sulla circonferenza B sono raggiungibili solo le caselle dispari, in quanto partendo da B_{11}=A_1, ogni mossa ci porta su una casella B_n, con n dispari (questo avviene in quanto B ha un numero pari di caselle);in particolare, è possibile raggiungere la casella B_1. Infine, sulla circonferenza C, che ha un numero pari di caselle, tutte le caselle dispari sono raggiungibili a partire dalla casella C_1=A_{22}, e tutte le caselle pari sono raggiungibili a partire da C_{16}=B_1. Concludendo, le caselle inaccessibili a partire da A_1 sono le caselle pari sulla circonferenza B, cioè vi sono 6 caselle inaccessibili.