Kangourou Italia
Gara del 15 marzo 2001
<u>Categoria Student</u>
Per studenti di quarta e quinta superiore

Regole:

- ***La prova è individuale. E' vietato l'uso di calcolatrici di qualunque tipo.***
- ***Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Le risposte esatte fanno sommare 3, 4 o 5 punti secondo la loro difficoltà (3 punti per i primi 10 quesiti, 4 punti per i quesiti da 11 a 20, 5 punti per gli ultimi 10). Ogni risposta errata fa sottrarre un quarto del suo valore in punti: si tolgono 0.75 punti per una risposta errata a un quesito da 3 punti, 1 punto se il quesito è da 4 punti, 1.25 se è da 5 punti. Se ad un quesito non viene data alcuna risposta il punteggio attribuito è 0. Ad esempio: se si risponde correttamente a 3 quesiti da 4 punti e si risponde in modo errato ad un quesito da 5 punti, il punteggio relativamente a questi quattro quesiti sarà $3\times 4 - 1.25 = 10.75$.***
- ***Durata della prova: un'ora e quindici minuti. Inserite le vostre risposte nelle corrispondenti caselle della scheda delle risposte.***

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Giuseppe ha 100 topolini ognuno dei quali è o bianco o grigio. Comunque si scelga un gruppo di sette topolini, almeno quattro sono bianchi. Qual è il massimo numero di topolini grigi che Giuseppe può avere?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 93 (E) 99.

2. Qual è il massimo numero di palline di legno di raggio 1 cm che e' possibile inserire in una scatola di forma cubica di volume 64 cm^3 ?
(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128.

3. Se $\log_2 10 = a$ allora $\log_{10} 2$ vale

(A) 2a (B) $\frac{a}{2}$ (C) 5a (D) $\frac{a}{5}$ (E) $\frac{1}{a}$.

4. Quanti sono i numeri interi positivi non primi minori di 1000 la somma delle cui cifre (in rappresentazione decimale) valga 2?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) un numero diverso dai precedenti.

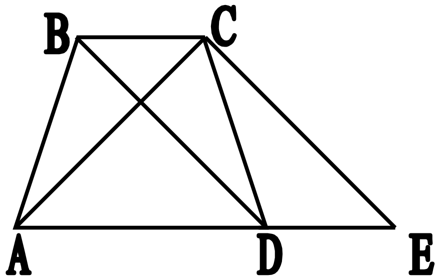
5. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un numero di 3 cifre (significative), esso sia pari e maggiore di 399?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{9}$.

6.
$$\frac{\overbrace{9999\ldots9999}^{18\ cifre}}{999999999} - 1 =$$

(A) 9^9 (B) $9^9 - 1$ (C) 9^{10} (D) 10^9 (E) 10^{10}.

7. Nella figura a fianco BC è parallelo ad AE e BD è parallelo a CE. Se x è l'area del quadrilatero ABCD e y l'area del triangolo ACE, allora
(A) $x = y$ (B) $x = 2y$ (C) $2x = y$
(D) e' vera una diversa relazione tra x e y
(E) e' impossibile determinare con questi soli dati, quale relazione valga tra x e y.



8. Il numero delle diverse quaterne di interi positivi (x, y, z, t) tali che $x < y < z < t$ e $xyzt - 1 = 2001$, è uguale a
(A) 10 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 1.

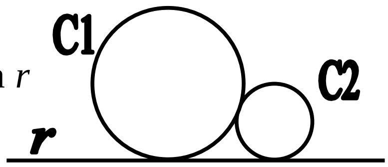
9. Due ciclisti partono dallo stesso punto alle 14.10. Il primo va verso nord ad una velocità di 32 km / h, mentre il secondo va verso est ad una velocità di 24 km / h. La distanza fra loro sarà di 130 km alle
(A) 16.10 (B) 16.20 (C) 17.10 (D) 17.25 (E) 17.35.

10. m è un intero positivo tale che MCD (m, 35) > 10. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) la rappresentazione decimale di m ha almeno 3 cifre
(B) m è multiplo di 35 (C) m è divisibile per 15 (D) m è divisibile per 25
(E) m è divisibile o per 5 o per 7 ma non per entrambi.

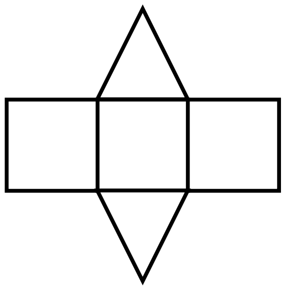
Nota: MCD (a, b) indica il massimo comune divisore tra a e b.

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Due circonferenze C1 e C2 di raggio diverso sono tangenti esternamente e tangono entrambe la stessa retta r (v. figura). Quale delle seguenti affermazioni è vera?



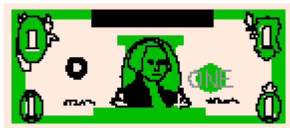
(A) Non esiste alcuna circonferenza tangente a C1, C2 ed a r
(B) Esiste una ed una sola circonferenza tangente a C1, C2 ed a r
(C) Esistono esattamente due circonferenze tangenti a C1, C2 ed a r
(D) Esistono esattamente quattro circonferenze tangenti a C1, C2 ed a r
(E) Nessuna delle affermazioni (A), (B), (C), (D) è vera.



12. La figura a fianco mostra lo sviluppo piano di un solido delimitato da tre quadrati di lato 4 cm e due triangoli equilateri. Qual è il volume del solido?

(A) $16\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ (B) $32\ \text{cm}^3$ (C) $\frac{64}{3}\ \text{cm}^3$ (D) $32\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ (E) $64\ \text{cm}^3$.

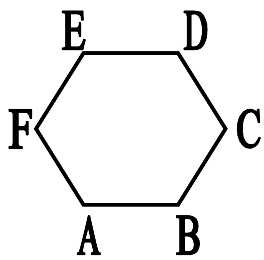
13. A New York 16 pacchetti di gomma da masticare costano tanti dollari quanti sono i pacchetti che si riescono a comperare con un dollaro. Quanti centesimi costa un pacchetto? (1 dollaro = 100 centesimi).



(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 25.

14. Sia 1, 4, 9, 16, … la successione dei quadrati dei numeri naturali. Il numero 10^8 è un termine di questa successione. Quale dei seguenti numeri è il termine successivo della successione?
(A) $(10^4 + 1)^2$ (B) $(10^8 + 1)^2$ (C) $(10^5)^2$ (D) $(10^8)^2$ (E) $(10^4)^2 + 1$.

15. ABCDEF è un esagono regolare. Allora il vettore



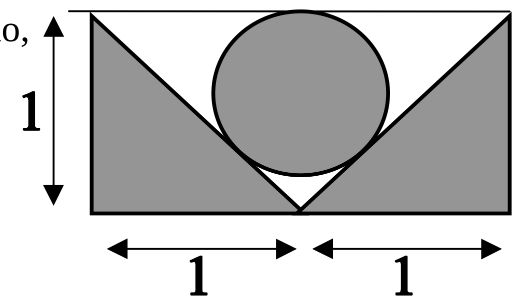
$$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}+2\cdot\overrightarrow{AF}$$

coincide con il vettore

(A) $\overrightarrow{AA}$ (B) $\overrightarrow{CA}$ (C) $\overrightarrow{FD}$ (D) $\overrightarrow{FB}$ (E) $\overrightarrow{CE}$.

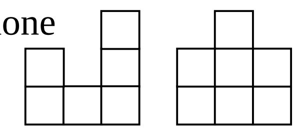
16. In un torneo fra 4 squadre di calcio (ogni squadra ha giocato contro ogni altra squadra una ed una sola volta), la classifica finale è la seguente: squadra A 7 punti, squadra B 4 punti, squadra C 3 punti, squadra D 3 punti. (Nelle partite di calcio una squadra ottiene 3 punti quando vince, 1 punto quando pareggia, 0 punti in caso di sconfitta). Come è finito l'incontro tra la squadra A e la D?
(A) A ha necessariamente vinto (B) hanno pareggiato (C) D ha necessariamente vinto (D) dipende dal risultato della sfida tra A e B (E) dipende dal risultato della sfida tra A e C.

17. Quanto vale l'area della figura in grigio, formata da due triangoli e da un cerchio?
(A) 1 (B) $\pi + 1$
(C) $\pi / 4 + 1$ (D) $\pi (3 - 2\sqrt{2}) + 1$
(E) $\pi \sqrt{2} / 2 + 1$.



18. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 0,9 cm mentre le lunghezze dei cateti sono a cm e b cm. Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?
(A) $a^2 + b^2$ (B) $(a + b)^2$ (C) 0,9 (D) $a + b$ (E) ab.

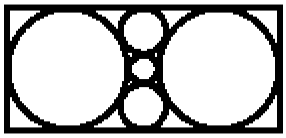
19. A fianco avete la vista da sinistra e frontale di una costruzione ottenuta accostando piccoli cubi. Quanti cubetti sono stati usati? Vengono richiesti il numero minimo ed il numero massimo di cubetti compatibili con le raffigurazioni mostrate.



(A) 7 e 13 (B) 8 e 13 (C) 7 e 15 (D) 7 e 16 (E) 8 e 16.

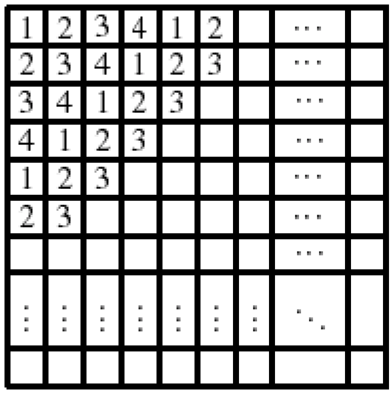
20. Un triangolo equilatero CDE viene costruito esternamente ad un quadrato ABCD sul lato CD. Quanti gradi misura l'angolo AEC?
(A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 54° (E) 60°.

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno



21. Trova la lunghezza del lato maggiore del rettangolo presentato nella figura (il lato minore misura 1), sapendo che le figure rotonde sono tutte cerchi.

(A) $-2+\sqrt{5}$ (B) $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$ (C) 2.5 (D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$.



22. Le celle di una griglia di 43 righe × 43 colonne sono colorate con 4 colori 1, 2, 3, 4 come mostrato nella figura. Quale colore è usato più spesso rispetto ad ognuno degli altri tre?
(A) colore 1 (B) colore 2 (C) colore 3
(D) colore 4 (E) nessuno.

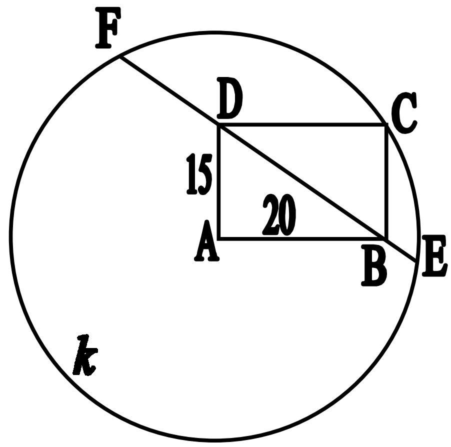
23. Per ogni numero intero positivo *n* calcoliamo la somma delle sue cifre (in rappresentazione decimale), poi la somma delle cifre del numero ottenuto e così via, fino ad ottenere un numero di una sola cifra che viene denotato con *w(n)*. Il numero $w(2001^{2001})$ è uguale a
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9.

24. Quante fra le coppie di cifre 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 possono essere la coppia delle ultime due cifre del quadrato perfetto di un numero intero?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) più di 4.

25. Siano *m* e *n* due numeri interi positivi tali che $\log_{10} m = 12.3\ldots$ e $\log_{10} = 15.4\ldots$. Quante cifre ha il prodotto $m \cdot n$?
(A) 15 (B) 16 (C) 27 (D) 28 (E) 189.

26. Due uomini e due ragazzi vogliono attraversare un fiume usando una piccola canoa che può portare al massimo o due ragazzi o solo un adulto. Qual è il minimo numero di traversate necessario per trasportare dall'altra parte del fiume tutte le persone?
(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 13.

27. Se ABCD è un rettangolo e k è una circonferenza con centro in A e passante per C, qual è la lunghezza della corda EF? (vedi figura).



(A) 50 (B) $2\sqrt{20 \cdot 25}$ (C) $2\sqrt{37 \cdot 13}$ (D) 44 (E) 25.

28. Sommando numeratore e denominatore, quando essi siano ridotti ai minimi termini, del risultato della seguente espressione

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2001^2}\right)$$

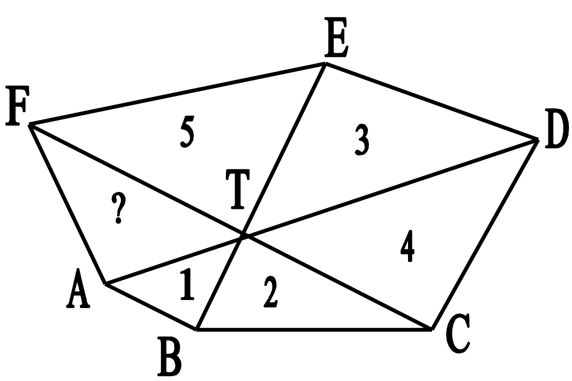
si ottiene

(A) 2001 (B) 3002 (C) 4003 (D) 5002 (E) 6001.

29. Lo zio Marco ha pescato alcuni pesci. Dà i tre più grandi al suo cane, riducendo il peso totale della sua pesca del 35%. Dà poi i tre pesci più piccoli al suo gatto, riducendo il peso totale rimanente dei 5 / 13. La famiglia mangia i restanti pesci per cena. Quanti pesci ha catturato lo zio Marco?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12.

30. Le diagonali AD, BE, CF di un esagono convesso ABCDEF passano tutte per uno stesso punto T. Quanto vale l'area del triangolo FAT, se le aree degli altri sono quelle indicate in figura?



(A) $\frac{6}{5}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{24}{5}$ (E) altro.

Risposte Categoria Student
Gara del 15 marzo 2001

1. (**B**) Se abbiamo fino a tre topi grigi le ipotesi sono soddisfatte ma se avessimo 4 topi grigi o più non sarebbe vero che in ogni gruppo di 7 topi ne troviamo almeno 4 bianchi.

2. (**A**) Possiamo mettere 4 palline in un primo strato e altre 4 in un secondo strato.

3. (**E**) Se $2^a = 10$ allora $2 = 10^{1/a}$ e quindi $\log_{10} 2 = 1/a$.

4. (**E**) Un numero n minore di 1000 è della forma $n=100a + 10b + c$. Se $a=0$ solo con $b=2$, $c=0$ si ha n non primo; se $a=1$ deve essere $b=1$, $c=0$; e infine se $a=2$ abbiamo la sola possibilità $b=0$, $c=0$: in conclusione ci sono tre numeri non primi minori di 1000 con la somma delle cifre uguale a 2 (i numeri sono: 20, 110 e 200).

5. (**B**) I numeri pari tra 400 e 999 sono 300 e i numeri di 3 cifre in totale sono 900 quindi la probabilità richiesta vale 300/900=1/3 .

6. (**D**) $\dfrac{10^{18}-1}{10^9-1} - 1 = 10^9 \dfrac{10^9-1}{10^9-1} = 10^9$.

7. (**A**) Se h denota l'altezza del trapezio abbiamo $\dfrac{AD+BC}{2}h = x, \dfrac{AD+DE}{2}h = y$, ed essendo $BC=DE$ abbiamo che $x = y$.

8. (**B**) $xyzt=2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ con $x<y<z<t$: le uniche possibilità sono le seguenti: $x=1, y=2, z=7, t=11\cdot 13$; $x=1, y=2, z=11, t=7\cdot 13$; $x=1, y=2, z=13, t=7\cdot 11$; $x=1, y=7, z=11, t=2\cdot 13$; $x=1, y=7, z=13, t=2\cdot 11$; $x=1, y=11, z=13, t=2\cdot 7$; $x=2, y=7, z=11, t=13$.

9. (**D**) Ogni ora si distanziano di 40 km (un triangolo rettangolo avente i cateti lunghi 24 e 30 km ha ipotenusa lunga 40 km), quindi per avere una distanza di 130 km occorrono 3 ore e un quarto e quindi questo succede alle 17.25.

10. (**B**) Un divisore di 35 maggiore di 10 può essere solo 35 stesso e quindi m deve essere multiplo di 35.

11. (**C**) Esiste una circonferenza nella regione limitata delimitata dalle due circonferenze e dalla retta ed esiste una circonferenza tangente alle due circonferenze e tangente alla retta in un punto situato a destra della circonferenza *C2*. Per risolvere in modo rigoroso questo problema si può prima risolvere quest'altro: trovare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti ad una retta ed a una circonferenza tangente alla retta stessa: questo luogo risulta una parabola avente fuoco nel centro della circonferenza e retta direttrice parallela alla retta data e a distanza pari al raggio. Se consideriamo allora le due parabole luoghi dei centri delle circonferenze tangenti rispettivamente a *C1* e r e a *C2* e r troviamo che queste due parabole si intersecano in due punti.

12. (**A**) L'area del triangolo base del prisma vale $4\frac{4\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}$ mentre l'altezza del prisma vale 4 quindi il volume vale $16\sqrt{3}$.

13. (**E**) Se x indica il costo di un pacchetto abbiamo la seguente equazione $16x = 1/x$ e quindi x=1/4, che significa 25 centesimi di dollaro.

14. (**A**) 10^8 è il quadrato di 10^4 e quindi il quadrato successivo è $(10^4+1)^2$.

15. (**E**) Abbiamo queste uguaglianze: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$, $2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$, per cui $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.

16. (**A**) La squadra A ha vinto 2 partite e pareggiato 1, la squadra B ha vinto 1 e pareggiato 1, la squadra C non può aver pareggiato tutte e 3 le sue partite in quanto in tal caso anche D avrebbe pareggiato le tre partite in contrasto con il fatto che A ha pareggiato solo una volta. Per cui C e D hanno vinto un incontro e perso due volte. Quindi l'incontro tra A e D è finito necessariamente con la vittoria di A (perché D non ha pareggiato e A non ha perso).

17. (**D**) Se x indica il raggio della circonferenza, abbiamo $x + x\sqrt{2} = 1$, ottenuta considerando il triangolo isoscele rettangolo avente vertici nel punto di contatto tra la circonferenza e il triangolo, nel centro della circonferenza e nel punto di intersezione dei due triangoli ombreggiati. Allora $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ per cui l'area della figura in grigio vale $1 + (\sqrt{2}-1)^2 p = p(3-2\sqrt{2}) + 1$.

18. (**E**) Si ha che $a^2 + b^2 = 0{,}9^2 < 0{,}9$ e quindi i numeri a e b sono tra 0 e 1. Questo comporta che $ab < 2ab$ £ $a^2 + b^2 < (a+b)^2$ e anche $a^2 + b^2 < a + b$.

19. (**E**) Consideriamo il cubo di lato 3 composto da 3 strati paralleli formati da 9 quadratini ciascuno. Indichiamo una possibile configurazione che utilizza il massimo numero di cubetti è: $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix}$, dove sono indicate per le 9 colonne di cui è costituito il cubo 3 x 3 x 3 quanti sono i cubetti utilizzati. Una configurazione che fornisce il numero minimo è la seguente: $\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}$.

20. (**C**) L'angolo *EDA* misura 90+60=150 gradi quindi *DEA* ne misura 15 per cui *AEC* è di 45 gradi.

21. (**D**) Se indico con x e y il raggio delle due circonferenze più piccoli, con x<y, abbiamo: $x+2y=1/2$ e $(1/2+x)^2+(x+y)^2=(1/2+y)^2$, dove la seconda relazione si è ottenuta considerando il triangolo rettangolo avente come vertici i centri della circonferenza maggiore e i centri delle due circonferenze di raggi x e y. Risolvendo il sistema si trova $x=\frac{\sqrt{5}}{2}-1$ e questo comporta che il lato più lungo del rettangolo misura $\sqrt{5}$.

22. (**C**) Si osservi che la prima riga della griglia termina con 1,2,3. Perciò i colori nell'ultima colonna sono (dall'alto verso il basso) 3,4,1,2,…,3,4,1. Contando con attenzione si trova che i colori sono distribuiti in questo modo: quelli del tipo 1,2,4 sono 462 mentre quelli di tipo 3 sono 463.

23. (**E**) Il numero 2001^{2001} è un multiplo di 9 per cui la somma delle sue cifre deve essere ancora un multiplo di 9. Così procedendo troviamo che $w(2001^{2001})=9$.

24. (**B**) I quadrati possono terminare per 00 e per 44, (basta pensare al quadrato di 10 e a quello di 12). Per verificare che non possiamo avere altre possibilità si esaminano tutte le possibilità dei quadrati di 10*a*+*b*, che terminano come $20ab+b^2$: se esaminiamo tutte le 10 possibilità per *b*=0,1,…9 scopriamo che gli unici valori di *b* che possono dar luogo ad un quadrato che finisce con due cifre uguali sono: *b*=0, *b*=2, *b*=8 e quindi i quadrati che terminano con due cifre uguali devono terminare con 00 o con 44.

25. (**D**) Il prodotto $m \times n$ è approssimativamente uguale a $10^{12.3+15.4}=10^{27.7}$ quindi ha 28 cifre.

26. (**C**) Una strategia ottimale potrebbe essere la seguente formata dalle 9 traversate che possiamo schematizzare in questo modo: (RR), (R), (A), (R), (RR), (R), (A), (R), (RR).

27. (**C**) Consideriamo l'altezza del triangolo *DAB* rispetto al vertice *A*: dato che la ipotenusa *BD* vale 25, si trova che l'altezza misura 20·15/25=12. Sia *P* il piede dell'altezza. Considerando i triangoli rettangoli *FAP* e *AEP*, si ottiene che la corda *EF* è lunga $2\sqrt{25^2-12^2}=2\sqrt{37\cdot 13}$.

28. (**B**) Sviluppando i vari prodotti notevoli e semplificando, abbiamo

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2001}{2000}\cdot\frac{2000}{2001}\cdot\frac{2002}{2001}=$$
$$=\frac{2002}{2\cdot 2001}=\frac{1001}{2001}$$

29. (**C**) Sia 100 il peso totale dei pesci. Indichiamo con $g_1 \geq g_2 \geq g_3$ i pesi dei tre pesci più grandi (in ordine decrescente), con $p_1 \geq p_2 \geq p_3$ i pesi dei tre pesci più leggeri e, infine, con $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_x$ i pesi dei pesci rimanenti. Le ipotesi ci dicono che $g_1+g_2+g_3=35$ e che $p_1+p_2+p_3=65\frac{5}{13}=25$. Allora $m_1+\ldots+m_x=40$. Considerando che g_3 vale al massimo 35/3 e che p_1 al minimo vale 25/3 si trova che $m_1,\ldots,m_x$ sono numeri compresi tra 25/3 e 35/3 quindi la loro somma, che vale 40, deve essere compresa tra x25/3 e x35/3. Questo comporta che x deve essere compreso tra 120/35 e 120/25 per cui l'unica possibilità per il numero intero x (dovendo essere intero!) è 4. In conclusione il numero totale dei pesci catturati è 4 + 3 + 3 = 10.

30. (**C**) Indichiamo con *a, b, c, d, e, f* le distanze dei punti *A, B,…, F* da *T* e con A_1, A_2, …, A_6 le aree dei triangoli *ABT, BCT,…, FAT* e con *x, y, z* gli angoli *ATB=DTE, BTC=ETF, CTD=FTA.* Allora si hanno queste relazioni: $A_1=(1/2)ab\cdot\sin x$, $A_2=(1/2)bc\cdot\sin y$, $A_3=(1/2)cd\cdot\sin z$, $A_4=(1/2)de\cdot\sin x$, $A_5=(1/2)ef\cdot\sin y$, $A_6=(1/2)fa\cdot\sin z$. Si trova allora questa relazione: $A_1A_3A_5=A_2A_4A_6$, da cui si deduce che $A_6=A_1A_3A_5/(A_2A_4)$. Nel nostro caso si ha dunque $A_6 = 10/3$.