

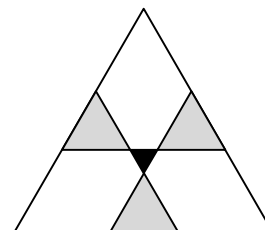


## LIVELLO BENJAMIN

### Tutte le risposte devono essere giustificate

**B1. (5 punti)** Due numeri interi sono tali che il loro prodotto e la loro somma hanno la stessa ultima cifra (cioè quella delle unità). Tra le dieci cifre, quali possono essere l'ultima cifra della somma?

**B2. (7 punti)** Osserva la figura. Tutti i triangoli che puoi vedere sono equilateri: i lati di quello nero (il più piccolo) sono lunghi 2 cm, i lati di quelli grigi sono lunghi tutti 5 cm. Quanto sono lunghi i lati del triangolo più grande (quello che li contiene tutti)? Come suggerisce la figura, i lati dei triangoli grigi e di quello nero che hanno vertici in comune stanno su una stessa retta.



**B3. (11 punti)** Nella strana repubblica di Kang l'anno è diviso negli stessi nostri mesi, con la stessa durata, ma i giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno "di ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno? (Ricorda che 1 non è un numero primo.)

**B4. (14 punti)** L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere una prova a risposta chiusa, rispondendo correttamente a tutte le domande. Può scegliere tra due buste:

- la busta A che contiene 5 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 2 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Per cercare di essere promosso, gli conviene scegliere la busta A o la B?

**B5. (18 punti)** Un parco circolare è circondato da una rete lunga 2016 metri. Ogni 8 metri di rete c'è una pianta e ogni 64 metri le piante sono dello stesso tipo. Quanti possono essere, al massimo, i diversi tipi di piante lungo la rete?

**B6. (22 punti)** La moneta di Kanglandia è il *kang*. A Kangcity il cambio euro - *kang* funziona così: si ottiene 1 *kang* pagando 1,20 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 *kang* e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Sono a Kangcity e ho solo euro. Esiste un modo (lecito) di acquistare un gelato che costa 2 *kang* spendendo solo 2 euro? In caso affermativo, qual è il minimo numero di cambi che mi consente di farlo?



### LIVELLO BENJAMIN

**B1. (5 punti)** Due numeri interi sono tali che il loro prodotto e la loro somma hanno la stessa ultima cifra (cioè quella delle unità). Tra le dieci cifre, quali possono essere l'ultima cifra della somma?

**Risposta:** 0, 2 e 4.

**Soluzione.** Osserviamo che, per soddisfare le condizioni, i due numeri devono essere entrambi pari: infatti se fossero entrambi dispari la somma sarebbe pari e il prodotto dispari e a rovescio se fossero uno pari e uno dispari. Inoltre basta prendere in esame i numeri pari da 0 a 8, poiché la cifra delle unità nella somma dipende esclusivamente dalle cifre delle unità dei due addendi e nel prodotto da quelle dei due fattori.

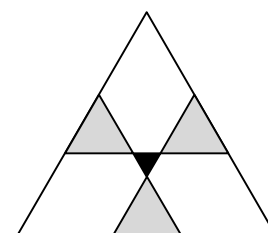
Ora  $0 + 0 = 0 = 0 \times 0$ ,  $2 + 2 = 4 = 2 \times 2$  e la cifra delle unità di  $4 + 8 = 12$  è uguale a quella di  $4 \times 8 = 32$ .

D'altra parte in tutti gli altri casi la somma di due cifre è diversa dal loro prodotto, come si vede ad esempio controllando le tabelle dell'addizione e della moltiplicazione:

+	0	2	4	6	8
0	0	2	4	6	8
2		4	6	8	10
4			8	10	12
6				12	14
8					16

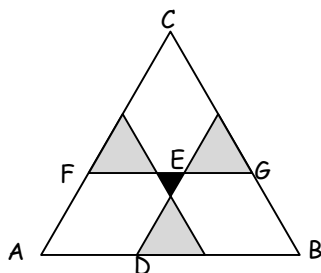
×	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2		4	8	12	16
4			16	24	32
6				36	48
8					64

**B2. (7 punti)** Osserva la figura. Tutti i triangoli che puoi vedere sono equilateri: i lati di quello nero (il più piccolo) sono lunghi 2 cm, i lati di quelli grigi sono lunghi tutti 5 cm. Quanto sono lunghi i lati del triangolo più grande (quello che li contiene tutti)? Come suggerisce la figura, i lati dei triangoli grigi e di quello nero che hanno vertici in comune stanno su una stessa retta.



**Risposta:** 19 cm.

**Soluzione.** Osserviamo che il quadrilatero  $ADEF$  che si ottiene accostando il triangolo nero al pentagono bianco in basso a sinistra è un rombo: infatti  $\widehat{CFG} = \widehat{CAB} = \widehat{HDB}$  (in quanto angoli di triangoli equilateri) e quindi i lati opposti del quadrilatero sono paralleli. Inoltre  $EF$  e  $DE$  sono congruenti poiché ciascuno è somma del lato di un triangolo grigio e di quello del triangolo nero (e i triangoli grigi sono congruenti): la loro lunghezza vale 7 cm. Lo stesso ragionamento può essere svolto sul quadrilatero in basso a destra e, visto che i triangoli grigi sono congruenti, i due rombi sono congruenti. Dunque  $AB$  è lungo  $7 \times 2 + 5 = 19$  cm.



**B3. (11 punti )** Nella strana repubblica di Kang l'anno è diviso negli stessi nostri mesi, con la stessa durata, ma i giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno "di ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno? (Ricorda che 1 non è un numero primo.)

**Risposta:** 23 o 24 (nei bisestili).

**Soluzione.** Osserviamo per iniziare che tutti i mesi finiscono con il giorno 30 (multiplo di 6) o 31 (primo) tranne febbraio che finisce con 29 (primo) nei bisestili mentre finisce con 28 (non festivo nella repubblica di Kang) negli altri anni. Poiché 2 è primo, quindi festivo, il giorno 1 è sempre di ponte tranne nel mese di marzo degli anni non bisestili. Questo comporta una prima aggiunta di 11 giorni negli anni normali e di 12 nei bisestili.

Sono poi festivi in ogni mese (se ci sono) i giorni 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30, 31, e l'unica coppia di giorni festivi consecutivi con un solo giorno lavorativo in mezzo è la coppia (3,5). Quindi il giorno 4 è di ponte in ogni mese e dobbiamo aggiungere 12 giorni a quelli già contati.

**B4. (14 punti )** L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere una prova a risposta chiusa, rispondendo correttamente a tutte le domande. Può scegliere tra due buste:

- la busta A che contiene 5 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 2 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Per cercare di essere promosso, gli conviene scegliere la busta A o la B?

**Risposta:** la busta A.

**Soluzione.** Se sceglie la busta A, Fox deve sperare di azzeccare la cinquina corretta su  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$  cinquine di risposte possibili. Se sceglie la busta B, deve sperare di azzeccare la coppia corretta su  $6 \times 6 = 36$  coppie di risposte possibili.

**B5. (18 punti)** Un parco circolare è circondato da una rete lunga 2016 metri. Ogni 8 metri di rete c'è una pianta e ogni 64 metri le piante sono dello stesso tipo. Quanti possono essere, al massimo, i diversi tipi di piante lungo la rete?

**Risposta:** 4.

**Soluzione.** Supponiamo che nel punto  $P$  ci sia la pianta  $p$ : dato che, ad es. muovendomi in verso orario, devo trovare lo stesso tipo di pianta ogni 64 m e che  $2016 = 64 \times 31 + 32$ , devo trovare una pianta di tipo  $p$  anche dopo  $64 - 32 = 32$  metri in verso orario a partire da  $P$ , cioè - visto che 32 divide 2016 - lungo la rete c'è una pianta dello stesso tipo ogni 32 metri; essendo le piante distanziate di 8 metri c'è posto solo per 4 tipi di piante.

**B6. (22 punti)** La moneta di Kanglandia è il *kang*. A Kangcity il cambio euro - *kang* funziona così: si ottiene 1 *kang* pagando 1,20 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 *kang* e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Sono a Kangcity e ho solo euro. Esiste un modo (lecito) di acquistare un gelato che costa 2 *kang* spendendo solo 2 euro? In caso affermativo, qual è il minimo numero di cambi che mi consente di farlo?

**Risposta:** sì, 40.

**Soluzione.** Devo riuscire ad ottenere 1 centesimo di *kang* per ogni centesimo di euro. Se cambio 5 centesimi di euro, per via dell'arrotondamento ottengo 5 centesimi di *kang* (si ha  $5/1,2 > 4$ ), ma se ne cambio di più ottengo comunque almeno 1 centesimo di *kang* in meno rispetto ai centesimi di euro che ho cambiato.