



Kangourou Italia
Gara del 16 marzo 2006
Categoria Cadet
Per studenti di terza media o
prima superiore



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. $20x(0+6)-(20x0)+6=$

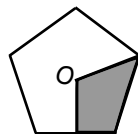
- A) 0 B) 106 C) 114 D) 126 E) 12

2. Lanciamo un dado (non truccato), con le facce numerate da 1 a 6. Quale dei seguenti eventi è il più probabile? L'uscita di un numero

- A) minore di 5 B) dispari C) divisibile per 3
 D) maggiore di 3 E) pari

3. Il punto O è il centro del pentagono regolare in figura. Quale percentuale del pentagono è ombreggiata?

- A) il 10% B) il 20% C) il 25%
 D) il 30% E) il 40%

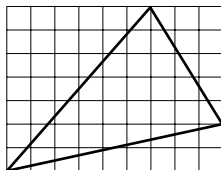


4. Una nonna dice ai nipoti: "***Se preparassi 2 tortine per ognuno di voi, mi resterebbe pasta a sufficienza per fare esattamente altre 3 tortine. Non posso però fare 3 tortine per ciascuno di voi, poiché non avrei la pasta per le ultime 2 tortine.***" Quanti nipoti ha quella nonna?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5. La figura rappresenta un foglio quadrettato su cui è disegnato un triangolo. Se il lato di ogni quadretto misura 1 centimetro, l'area del triangolo vale (in centimetri quadrati)

- A) 25,5 B) 25,75 C) 26,25
 D) 28 E) 24,7



6. Una bottiglietta da $\frac{1}{3}$ di litro è piena per $\frac{3}{4}$. Quanti centilitri di liquido conterrà dopo averne versato in un bicchiere 20 centilitri?

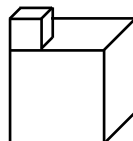
- A) 24,5 B) 7,5 C) 5 D) 13 E) 0 (cioè sarà vuota)



7. Un'indagine su 2006 studenti di Milano ha messo in luce che l'anno scorso 1500 di loro hanno partecipato alla gara matematica "Kangourou" e 1200 alla gara letteraria "Giovani scrittori". Se solo 6 degli studenti intervistati non hanno partecipato ad alcuna gara, quanti hanno invece partecipato ad entrambe le gare?

- A) 300 B) 500 C) 600 D) 700 E) 1000

8. Il solido in figura è formato da due cubi. Il più piccolo, il cui lato è lungo 1 centimetro, è interamente appoggiato sulla faccia superiore del cubo più grande il cui lato misura 3 centimetri. Quanto misura, in centimetri quadrati, la superficie totale del solido?



- A) 56 B) 58 C) 60 D) 62 E) 64

9. Due lati di un triangolo (non degenere) misurano ciascuno 7 centimetri. La lunghezza del terzo lato è un numero intero di centimetri. Quanti centimetri può misurare al massimo il perimetro del triangolo?

- A) 14 B) 15 C) 21 D) 27 E) 28

10. In una classe ci sono 21 studenti e in essa non ci sono due ragazze che siano amiche dello stesso numero di ragazzi della classe. Quante possono essere al massimo le ragazze in quella classe?

- A) 13 B) 10 C) 9 D) 12 E) 11

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Il mio astuccio è di un solo colore: *se è blu, è tondo; se è quadrato, è rosso; è blu o giallo; se è giallo, è quadrato; è quadrato o tondo*. Come è il mio astuccio?

- A) rosso e quadrato B) rosso e tondo C) quadrato e blu
D) blu e tondo E) giallo e tondo

12. Andrea, Bruno e Carlo hanno unito i loro risparmi per acquistare una tenda da campeggio. Carlo ha contribuito per il 60% del prezzo, Andrea per il 40% della quota restante. Bruno ha aggiunto i 30 euro mancanti. Qual era il prezzo, in euro, della tenda?

- A) 50 B) 60 C) 125 D) 150 E) 200

13. Due treni della stessa lunghezza stanno viaggiando uno incontro

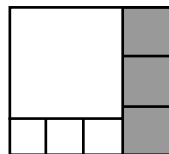


all'altro su una linea a doppio binario, il primo a 100 km/h e il secondo a 120 km/h. Quando si incrociano, da un finestrino del secondo treno un passeggero osserva che ci vogliono esattamente 6 secondi perché il primo treno gli sfili davanti completamente. In quanti secondi un passeggero del primo treno vede sfilare davanti a sé il secondo treno?
 A) 5 B) 6 C) tra 6 e 7 D) 7 E) più di 7

14. Una comitiva di alieni attraversa lo spazio sull'astronave STAR 1. Sono di tre colori diversi: verde, lilla e blu. I verdi hanno due tentacoli, i lilla ne hanno tre e i blu ne hanno cinque. I verdi sono tanti quanti i lilla e i blu sono 10 più dei verdi. Insieme hanno 250 tentacoli. Quanti alieni blu viaggiano su STAR 1?
 A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

15. Quando il canguro Jumpy si spinge con la gamba sinistra salta 2 metri; quando si spinge con la destra salta 4 metri; infine quando si spinge con entrambe le gambe, salta 7 metri. Qual è il minimo numero di salti sufficienti a Jumpy per coprire una distanza di 997 metri esatti?
 A) 146 B) 145 C) 144 D) 143 E) 142

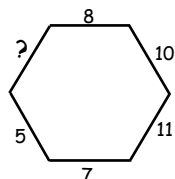
16. Un rettangolo è diviso in 7 quadrati. Il lato dei quadrati grigi incolonnati a destra misura 8. Quanto misura il lato del grande quadrato bianco?
 A) 15 B) 18 C) 20 D) 24 E) 30



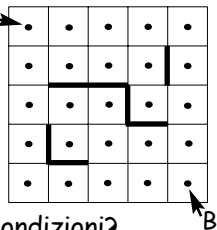
17. Quale numero aumenta del 500% quando se ne fa il quadrato?
 A) 6 B) 10 C) 7 D) 8 E) 5

18. Quanti triangoli isosceli (a due a due non congruenti) di area 1 hanno un lato lungo 2?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19. In ciascuno dei vertici dell'esagono che vedi in figura c'era un certo numero di sassolini; su ciascun lato è riportata la somma dei sassolini che erano presenti nei due vertici adiacenti. Quanto vale la somma mancante?
 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



20. In figura è rappresentato un quadrato suddiviso in 25 quadretti, in ciascuno dei quali è segnato il centro; con tratto più spesso sono segnati 3 ostacoli. Vogliamo andare da A a B passando da un centro all'altro solo per linee verticali e/o orizzontali, evitando gli ostacoli e **per la via più breve**. Quanti sono i cammini da A a B che rispettino **tutte** queste condizioni?
- A) 6 B) 8 C) 9 D) 11 E) 12



I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Se il prodotto di due interi è uguale a $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$, allora la loro somma
- A) potrebbe essere divisibile per 3 B) potrebbe essere divisibile per 5
 C) potrebbe essere divisibile per 49 D) potrebbe essere divisibile per 8
 E) non può mai essere divisibile per 8, né per 5, né per 49, né per 3

Cadet

22. Se a e b sono due numeri interi positivi tali che $a^2b + ab^2 = 30$ allora $a + b + ab$ vale
- A) 13 B) 10 C) 17 D) 31 E) 11

23. Sulla prima striscia vedi 11 carte, ciascuna con due lettere. Sulla seconda vedi le stesse carte ordinate in maniera diversa. Quale delle scritte che seguono può apparire nella seconda riga della seconda striscia di carte?

M	I	S	S	I	S	S	I	P	P	I
K	I	L	I	M	A	N	J	A	R	O
P	S	I	S	I	M	I	S	S	P	I

- A) ANJAMKILIOR B) RLIIMKOJNAA C) JANAMKILIRO
 D) ANMAIKOLIRJ E) RAONJMILIKA

24. Qual è la prima cifra del più piccolo numero intero positivo la somma delle cui cifre sia 2006?
- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8



25. La mamma ha lavato le calze di Gianni - 5 paia nere, 10 paia marroni e 15 paia grigie - e gli ha chiesto di riporle dopo averle accoppiate per colore. Gianni invece le ha messe tutte mescolate in una scatola. Ora Gianni deve partire per un campeggio di 7 giorni: qual è il minimo numero di calze che gli basta estrarre dalla scatola, anche al buio, per essere sicuro di avere almeno 7 paia di calze ben accoppiate?

- A) 16 B) 14 C) 35 D) 37 E) 18

26. Denota con $E(n)$ la somma delle cifre dispari del numero n . Ad esempio $E(7)=7$, $E(2)=0$ ed $E(3245)=8$. Quanto vale $E(1)+E(2)+E(3)+\dots+E(99)$?

- A) 300 B) 400 C) 450 D) 500 E) 550

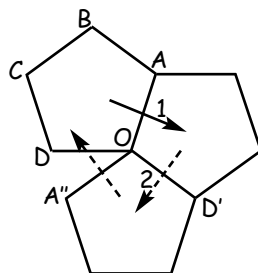
27. Piero va in bicicletta da un punto P a un punto Q con velocità costante. Se aumentasse la sua velocità di 3 metri al secondo, arriverebbe a Q tre volte più in fretta (cioè impiegando un terzo del tempo). Quante volte più in fretta arriverebbe a Q, se aumentasse la sua velocità di 6 metri al secondo?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 4,5 E) 8

28. Una locomotiva traina un treno di 5 vagoni, S, T, U, V e W. In quanti modi possono essere accostati i vagoni se la locomotiva deve risultare sempre più vicina al vagone S che al vagone T?

- A) 120 B) 60 C) 48 D) 30 E) 10

29. In figura è rappresentato un pentagono regolare $OABCD$ ed i pentagoni che da esso si ottengono facendo prima una rotazione di centro O che porti il lato OD a sovrapporsi al lato OA (e OA a OD'), poi una rotazione di centro O che porti il lato OA a sovrapporsi al lato OD' (e OD' a OA''). Continuando in questo modo, qual è il minimo numero di rotazioni sufficienti a riportare il pentagono nella posizione iniziale?



- A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20

30. Quanto vale $a-b$, se

$$a = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2005^2 \quad \text{e} \quad b = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 2004 \times 2006?$$

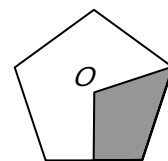
- A) 2000 B) 2004 C) 2005 D) 2006 E) 0



Categoria Cadet
Per studenti di terza media o prima superiore

- Risposta **D)**. $20 \times (0 + 6) - (20 \times 0) + 6 = 20 \times 6 - 0 + 6 = 126$.
- Risposta **A)**. Infatti tra i sei numeri da 1 a 6 ce ne sono: tre pari, tre dispari, due divisibili per 3, tre maggiori di 3 ma **quattro minori di 5**: allora questo evento si presenta 4 volte su 6 (a fronte delle 3 su 6 o 2 su 6 degli altri eventi) e risulta quindi il più probabile.

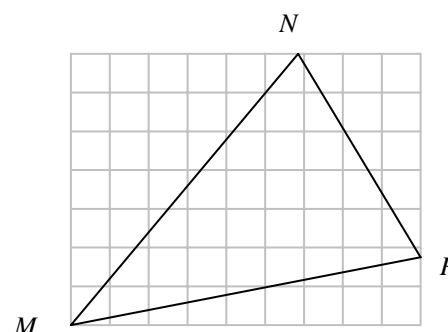
- Risposta **D)**. Il pentagono può essere scomposto in 5 triangoli isosceli uguali, aventi vertice nel centro e base sui lati, ciascuno dei quali è scomposto dall'altezza relativa alla base in 2 triangoli rettangoli uguali. Di 3 siffatti triangoli rettangoli è composta la figura ombreggiata: quindi sono ombreggiati i $3/10 = 30\%$ della figura.



- Risposta **B)**. Detto n il numero di nipoti, risulta $2n + 3 = 3n - 2$ da cui $n = 5$.

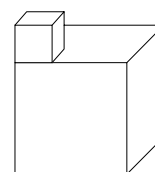
- Risposta **A)**. Il triangolo MNP è ottenuto togliendo ad un rettangolo, i cui lati misurano rispettivamente 9 e 7 cm, tre triangoli rettangoli aventi cateti lunghi rispettivamente: 6 e 7 cm, 9 e 2 cm, 5 e 3 cm. Quindi l'area in cm^2 vale:

$$63 - (21 + 9 + 7,5) = 25,5.$$

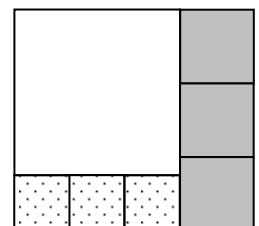


- Risposta **C)**. La bottiglietta conteneva $(1/3)(3/4) = 1/4$ di litro, cioè 25 cl: versandone 20 cl ne restano 5 cl.
- Risposta **D)**. Infatti 2000 studenti hanno partecipato ad almeno una delle due gare, ma in totale ci sono state $1500 + 1200 = 2700$ prove: le **700** prove in più corrispondono agli studenti che hanno sostenuto due prove.

- Risposta **B)**. La superficie totale del solido è equivalente alla superficie totale del cubo più grande ($9 \times 6 \text{ cm}^2$) aumentata della superficie laterale di quello più piccolo ($1 \times 4 \text{ cm}^2$): quindi la superficie totale misura **58 cm^2** .



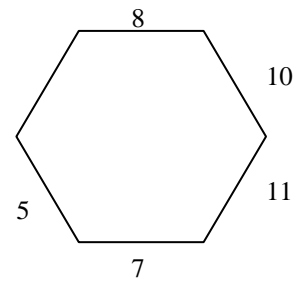
9. Risposta **D**). La lunghezza del terzo lato deve essere minore della somma della lunghezza degli altri due: trattandosi di un numero intero, misura al massimo 13 cm. Quindi il perimetro misura al massimo $(7 + 7 + 13) = 27$ cm.
10. Risposta **E**). Ordinando le ragazze da quelle che hanno meno amici a quelle che ne hanno di più si vede che: la prima può non essere amica di alcun ragazzo, ma la seconda deve esserlo almeno di 1, la terza almeno di 1 più della seconda ecc. Allora, se n è il numero delle ragazze, i ragazzi non possono essere meno di $n - 1$. Nel caso siano proprio $n - 1$, che è quello che ci interessa, si avrebbe $2n - 1 = 21$, da cui $n = 11$.
11. Risposta **D**). L'astuccio non può essere giallo: se lo fosse, le affermazioni "Se è giallo, è quadrato" e "Se è quadrato, è rosso" risulterebbero contraddittorie (il mio astuccio non può essere insieme giallo e rosso). Allora è blu (III affermazione) e quindi è tondo (I affermazione).
12. Risposta **C**). Se 30 € sono il $100\% - 40\% = 60\% = 3/5$ della quota restante, questa era di 50 €. D'altra parte 50 € sono il $40\% = 2/5$ del totale che quindi risulta di 125 €.
13. Risposta **B**). Entrambi i passeggeri vedono "l'altro" treno viaggiare alla velocità di 220 km/h. Per le nostre considerazioni è del tutto equivalente pensare che il primo treno sia fermo ed il secondo viaggi a 220 km/h: è allora chiaro che se il secondo treno si sposta di un tratto pari alla lunghezza del primo treno in **6 secondi**, un passeggero fermo sul primo treno (che è lungo quanto il secondo) lo vede sfilare esattamente nello stesso tempo.
14. Risposta **D**). Denotato il numero degli alieni dei vari colori con V, L, B , si ha $250 = 2V + 3L + 5B$ con $V = L$ e $B = V + 10$, da cui $50 = (B - 10) + B$ e quindi gli **alieni blu** sono **30**.
15. Risposta **C**). Dovendo percorrere un numero dispari di metri, Jumpy dovrà fare un numero dispari di salti da 7 metri e coprire il restante tragitto con salti da 2 o 4 metri. Con 141 salti da 7 metri raggiunge i 987 metri e con altri tre salti, due da 4 m e l'altro da 2, raggiunge i 997 m esatti.
16. Risposta **B**). Perché i lati del quadrato bianco siano di uguale lunghezza, la lunghezza (24) del lato più lungo del rettangolo ottenuto unendo i 3 quadrati grigi deve essere uguale a 4 volte la lunghezza del lato dei quadrati più piccoli: quindi il lato del quadrato bianco misura $(3/4) \times 24 = 18$.



17. Risposta **A**). Detto x il numero (non nullo), deve risultare $x + 5x = x^2$, cioè $x = 6$.

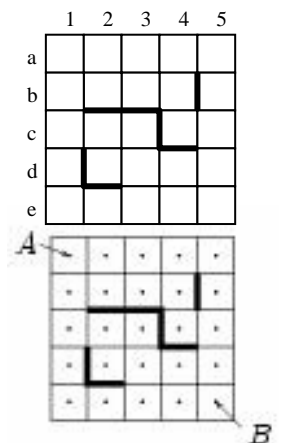
18. Risposta **D**). Se il lato di lunghezza 2 è la base del triangolo isoscele, l'altezza corrispondente deve essere 1 perché l'area valga 1 (triangolo rettangolo isoscele). Se il lato di lunghezza 2 non è la base, detta b la lunghezza di metà base e h l'altezza corrispondente, si deve avere $bh = 1$ e $b^2 + h^2 = 4$; per la simmetria con cui giocano b e h nelle due equazioni, si hanno due soluzioni positive entrambe accettabili. In totale dunque **3 triangoli** isosceli soddisfano le richieste.

19. Risposta **E**). Denotiamo con h, k, m, n, p, r il numero di sassolini originariamente presenti nei vertici, in senso antiorario a partire dal lato marcato con 5. Allora $h+k=5$, $k+m=7$, $m+n=11$, $n+p=10$, $p+r=8$ ed $r+h$ è ciò che dobbiamo trovare. Osserviamo che $(h+k)-(k+m)+(m+n)-(n+p)+(p+r) = h+r$; dunque $h+r = 5-7+11-10+8 = 7$.



20. Risposta **E**). Denotando i cammini possibili con le coordinate delle caselle per cui passano (in rosso i punti in cui si è scelto, in nero le mosse forzate), si vede che sono 12.

- $a1-a2-a3-a4-a5-b5-c5-d5-e5$; $a1-a2-a3-a4-b4-c4-c5-d5-e5$;
- $a1-a2-a3-b3-b4-c4-c5-d5-e5$; $a1-a2-b2-b3-b4-c4-c5-d5-e5$;
- $a1-b1-b2-b3-b4-c4-c5-d5-e5$; $a1-b1-c1-c2-c3-d3-d4-d5-e5$;
- $a1-b1-c1-c2-c3-d3-d4-e4-e5$; $a1-b1-c1-c2-c3-d3-e3-e4-e5$;
- $a1-b1-c1-c2-d2-d3-d4-d5-e5$; $a1-b1-c1-c2-d2-d3-d4-e4-e5$;
- $a1-b1-c1-c2-d2-d3-e3-e4-e5$; $a1-b1-c1-d1-e1-e2-e3-e4-e5$.



21. Risposta **A**). La somma dei due interi di prodotto $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ potrebbe essere divisibile per 3: ciò succede se ciascuno dei due numeri è divisibile per 3 (ad esempio se uno dei due è $2^5 \cdot 3$ e l'altro è $3 \cdot 5 \cdot 7^3$). Non può mai essere divisibile per 8 (o per 5, o per 49) poiché uno dei due fattori è divisibile per tale numero e se lo fosse la somma dovrebbe esserlo anche il secondo fattore, cosa impossibile poiché tale numero non compare al quadrato nel prodotto.

22. Risposta **E**). Se $30 = a^2b + ab^2 = ab(a+b)$, allora a, b e $(a+b)$ sono tre interi >0 fattori di 30. Le possibili terne fattori di 30 sono $(1,2,15)$, $(1,3,10)$, $(1,5,6)$, $(2,3,5)$. La terza e la quarta vanno bene ($1 + 5 = 6$ e $2 + 3 = 5$): in entrambi i casi si ha $a + b + ab = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 11$.

23. Risposta **D**). Si osservino infatti le prime e le ultime lettere delle 5 scritte

proposte:

M	I	S	S	I	S	S	I	P	P	I
K	I	L	I	M	A	N	J	A	R	O
P	S	I	S	I	M	I	S	S	P	I

L'ultima di ANJAMKILIOR è R e l'ultima di RLII MKOJNAA è A, ma queste sono le lettere della parola KILIMANJARO che corrispondono alle due P (o ad una S) della parola MISSISSIPPI sulla prima striscia di carte, non alla I: quindi A) e B) non sono accettabili.

La prima lettera di JANAMKILIRO è J che, come appena osservato, non è una delle lettere che corrispondono alle P di MISSISSIPPI; la penultima lettera di RAONJMILIKA è una K che non corrisponde ad alcuna P di MISSISSIPPI. Dunque neppure C) ed E) sono accettabili.

Si verifica poi banalmente che ANMAIKOLIRJ è accettabile.

24. Risposta E). Il più piccolo numero naturale la somma delle cui cifre sia 2006 deve avere il maggior numero possibile di cifre pari a 9 e, come prima cifra, il resto nella divisione di 2006 per 9. Il resto nella divisione di 2006 per 9 è 8 ($2006 = 9 \times 222 + 8$), quindi la prima cifra deve essere 8. (N.B. il numero ha comunque 223 cifre e, valendo all'incirca 9×10^{222} , supera di gran lunga il numero di atomi dell'universo!)

25. Risposta A). È chiaro che non basta estrarre 15 calze, poiché c'è l'eventualità che ne escano 5 di ogni tipo e quindi solo 6 coppie ben assortite. Bastano invece 16 tentativi. Infatti, in questo caso, vi devono essere (almeno) 6 calze dello stesso colore, che forniscono 3 coppie (ben appaiate). Nelle rimanenti 10, ve ne devono essere 4 dello stesso colore (eventualmente uguale al precedente), che forniscono altre 2 coppie. Nelle rimanenti 6, ve ne devono essere 2 dello stesso colore, che forniscono un'altra coppia. L'ultima coppia è senz'altro fornita dalle rimanenti 4.

Argomentazione alternativa.

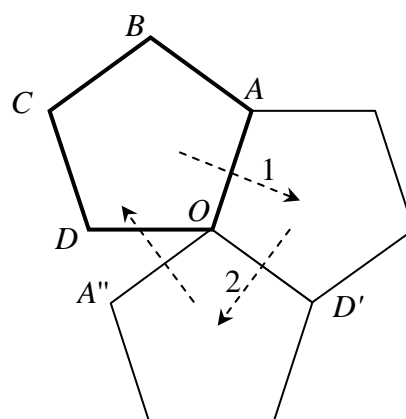
Se ogni colore è presente con un numero pari di calze, si possono formare 8 coppie. Se invece tra le 16 calze estratte ce n'è un numero dispari di un dato colore A, visto che il numero totale delle calze è pari, deve essercene un numero dispari anche di un altro colore B: basta escludere una calza di colore A ed una di colore B per avere un numero pari di calze di ogni colore, per un totale di $(16 - 2)/2 = 7$ coppie ben appaiate di calze. .

26. Risposta **D**). Quella che ci viene chiesta è, di fatto, la somma di tutte le cifre dispari che scriviamo ogni volta che scriviamo (una e una sola volta) tutti gli interi da 1 a 99. È chiaro che ogni cifra dispari viene scritta 20 volte: 10 nella "posizione" delle unità e 10 in quella delle decine. Si ha $20 \times (1+3+5+7+9) = 500$.

27. Risposta **B**). Infatti, chiamiamo v la velocità (in m/s) di Piero e $3t$ il tempo (in secondi) impiegato a percorrere il tragitto: sappiamo che $3tv = t(v+3)$, cioè $v = 1,5$ m/s. Se la velocità salisse a 7,5 m/s, quintuplicherebbe e quindi Piero impiegherebbe $1/5$ del tempo.

28. Risposta **B**). Infatti se non ci fosse il vincolo sui vagoni S e T i possibili accostamenti diversi sarebbero $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (la prima posizione può essere scelta tra 5 differenti vagoni, operata la prima scelta ne restano 4 su cui operare la seconda ecc.). Questi 120 accostamenti possono essere raggruppati a coppie in cui la posizione di U, V, W è la stessa mentre S e T si scambiano di posto: quindi **60** accostamenti hanno S che precede T come richiesto e 60 no.

29. Risposta **B**). Vengono fatte rotazioni intorno ad O di angoli multipli dell'angolo interno del pentagono regolare (108°). Ora il susseguirsi di n tali rotazioni dà un multiplo di angolo giro se e solo se $108n = 360k$, cioè $3n = 10k$, per qualche intero positivo k : il minimo n per cui l'uguaglianza è vera è **10** (con $k = 3$).



30. Risposta **C**). Osserviamo che si può scrivere

$$b = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 2004 \times 2006 =$$

$$= 1 \times (1 + 2) + 2 \times (2 + 2) + 3 \times (3 + 2) + \dots + 2004 \times (2004 + 2) =$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2) + 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 2004)$$

e quindi, essendo $a = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2005^2$, si ha

$$a - b = 2005^2 - 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 2004) = 2005^2 - 2004 \times 2005 = \mathbf{2005}.$$

(Si è qui usata la nota formula $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = n \times (n+1)/2$.)