

Kangourou della Matematica 2011
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2011

LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Le tre lettere A , B e C rappresentano ciascuna una cifra e lettere diverse rappresentano cifre diverse). Sai che $A + A + A + A = CB$ e che $B + B + B + B = A$. Qual è la cifra rappresentata da A ?

B2. (7 punti) Accanto ad ogni punto \bullet della figura deve essere scritto un numero in modo che la somma dei numeri scritti agli estremi di ciascun segmento sia sempre la stessa qualunque sia il segmento. Due numeri sono già stati scritti. Che numero va scritto al posto di x e perché?

B3. (11 punti) Alla finale di Mirabilandia per ognuna delle cinque categorie vengono proposti sei problemi, uno per ciascuno dei seguenti punteggi: 5, 7, 11, 14, 18 e 22. Naturalmente in ogni singola categoria i sei problemi devono essere tutti diversi fra loro, ma uno stesso problema può essere assegnato in più di una categoria. Tieni però presente che, se un problema fornisce un certo punteggio in una categoria e compare anche in una categoria superiore, in quest'ultima deve fornire un punteggio inferiore.

Il comitato organizzatore vuole preparare il minore numero possibile di problemi. Qual è questo numero?

B4. (14 punti) Immagina una lista in cui compaiano in ordine crescente tutti i numeri interi positivi la somma delle cui cifre è divisibile per 5 (la lista inizierà dunque così: 5, 14, 19, 23,...). Qual è la minima differenza possibile fra un numero e quello che lo precede in questa lista?

B5. (18 punti) Vi sono diversi modi di ripartire un quadrato in 4 triangoli che abbiano tutti la stessa area (uguale a un quarto dell'area del quadrato). Trova il maggior numero di modi che ti è possibile, illustrando ognuno di essi con un disegno.

Attenzione:

- "ripartire" significa scomporre senza sovrapposizioni se non, eventualmente, di lati;
- devi considerare diversi due modi solo se non puoi ottenere una figura dall'altra per rotazione del quadrato: ad esempio sono uguali i due modi suggeriti dalle figure qui a lato.

B6. (22 punti) Ada, Bruna e Carla saltano ciascuna sul proprio jumper la cui base è praticamente un punto. Ognuna di loro compie salti sempre della stessa lunghezza; le lunghezze sono rispettivamente 70, 80, e 85 cm. Seguono tutte, partendo da uno stesso punto e muovendosi nello stesso verso, uno stesso circuito circolare lungo 400 metri, che è attraversato da una fossato largo 73 cm. Accade che solo una di loro riesce a fare 2 giri completi del circuito senza cadere nel fossato: chi e perché? (Le lunghezze dei salti e la larghezza del fossato si intendono misurate su archi del circuito, non su corde.)

Kangourou della Matematica 2011
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 9 maggio 2011

LIVELLO BENJAMIN

B1. (5 punti) Le tre lettere A , B e C rappresentano ciascuna una cifra e lettere diverse rappresentano cifre diverse). Sai che $A + A + A + A = CB$ e che $B + B + B + B = A$. Qual è la cifra rappresentata da A ?

Soluzione: 8.

La seconda somma ci dice che il numero costituito dalla cifra A deve essere il quadruplo di quello costituito dalla cifra B : allora può essere solo 4 o 8, che comportano per la cifra B i valori rispettivamente 1 e 2. D'altra parte, la prima somma ci dice che B deve essere una cifra pari (i conti tornano: $4 \times 8 = 32$).

B2. (7 punti) Accanto ad ogni punto \bullet della figura deve essere scritto un numero in modo che la somma dei numeri scritti agli estremi di ciascun segmento sia sempre la stessa qualunque sia il segmento. Due numeri sono già stati scritti. Che numero va scritto al posto di x e perché?

Soluzione: 1.

Prima di tutto, è possibile realizzare quanto richiesto utilizzando solo i numeri 1 e 4: basta alternarli sui vertici di ogni esagono (in questo modo la somma dei numeri scritti agli estremi di ciascun segmento è 5 e al punto contrassegnato con x tocca il numero 1). D'altra parte, questa è l'unica soluzione del problema. Infatti tutti i punti sono collegabili fra loro, nel senso che, considerati due punti qualunque A e B , esiste una catena di segmenti consecutivi tali che il primo estremo del primo segmento sia A e il secondo estremo dell'ultimo segmento sia B : il fatto che la somma agli estremi di ciascun segmento debba sempre essere la stessa e che a due punti siano già stati assegnati i numeri 1 e 4, implica che non ci sia possibilità diversa dall'alternare questi due numeri.

B3. (11 punti) Alla finale di Mirabilandia per ognuna delle cinque categorie vengono proposti sei problemi, uno per ciascuno dei seguenti punteggi: 5, 7, 11, 14, 18 e 22.

Naturalmente in ogni singola categoria i sei problemi devono essere tutti diversi fra loro, ma uno stesso problema può essere assegnato in più di una categoria. Tieni però presente che, se un problema fornisce un certo punteggio in una categoria e compare anche in una categoria superiore, in quest'ultima deve fornire un punteggio inferiore.

Il comitato organizzatore vuole preparare il minore numero possibile di problemi. Qual è questo numero?

Soluzione: 10.

È chiaro che la soluzione più "economica" consiste nel far "slittare" i problemi passando da una categoria a quella immediatamente superiore, nel modo seguente.

Si preparano i 6 problemi della categoria Écolier. Per la Benjamin si elimina il primo della Écolier (che non può essere riutilizzato in alcun modo), si riutilizzano quelli dal secondo al sesto come problemi dal primo al quinto (mantenendo l'ordine) e si crea il sesto (che è il settimo preparato). Per le successive categorie si procede con lo stesso criterio.

B4. (14 punti) Immagina una lista in cui compaiano in ordine crescente tutti i numeri interi positivi la somma delle cui cifre è divisibile per 5 (la lista inizierà dunque così: 5, 14, 19, 23,...). Qual è la minima differenza possibile fra un numero e quello che lo precede in questa lista?

Soluzione: 1.

È sufficiente considerare per esempio i numeri 49999 e 50000.

B5. (18 punti)

Vi sono diversi modi di ripartire un quadrato in 4 triangoli che abbiano tutti la stessa area (uguale a un quarto dell'area del quadrato). Trova il maggior numero di modi che ti è possibile, illustrando ognuno di essi con un disegno.

Attenzione:

- "ripartire" significa scomporre senza sovrapposizioni se non, eventualmente, di lati;
- devi considerare diversi due modi solo se non puoi ottenere una figura dall'altra per rotazione del quadrato: ad esempio sono uguali i due modi suggeriti dalle figure qui a lato.

Soluzione. Le figure sono 11.

Tre figure viste in uno specchio (con un lato coincidente con un lato del quadrato ma perpendicolare al piano del disegno) danno luogo a figure uguali a meno di una rotazione.

Altre quattro invece danno luogo a figure che sono simmetriche ma non ottenibili da quelle di partenza per rotazione: vedi a lato

(Per la dimostrazione del fatto che queste sono le sole configurazioni possibili vedi C6).

B6. (22 punti) Ada, Bruna e Carla saltano ciascuna sul proprio jumper la cui base è praticamente un punto. Ognuna di loro compie salti sempre della stessa lunghezza; le lunghezze sono rispettivamente 70, 80, e 85 cm. Seguono tutte, partendo da uno stesso punto e muovendosi nello stesso verso, uno stesso circuito circolare lungo 400 metri, che è attraversato da un fossato largo 73 cm. Accade che solo una di loro riesce a fare 2 giri completi del circuito senza cadere nel fossato: chi e perché? (Le lunghezze dei salti e la larghezza del fossato si intendono misurate su archi del circuito, non su corde.)

Soluzione: Bruna.

Il salto di Ada è più corto della larghezza del fossato, quindi non potrà mai saltarlo.

Carla dopo 470 salti è a 50 cm dalla conclusione del primo giro e quindi nel secondo giro ad ogni salto atterra 50 cm prima di dove è atterrata nel primo giro. Se nel primo giro riesce a superare il fossato, dopo averlo superato atterra a non più di 12 cm dal bordo: al secondo giro quindi cade certamente dentro il fossato.

Bruna invece, poiché 40000 è un multiplo intero di 80, dopo 500 salti tornerà al punto di partenza e nei giri successivi atterrerà esattamente negli stessi punti in cui è atterrata durante il primo giro: o cade nel fossato al primo giro o non vi cade più.